

# COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI

## 20 Settembre 2001

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \alpha x_1^2(t) + \beta x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha x_1(t) - \beta x_2(t) + \alpha \beta x_1^2(t) x_2^3(t),\end{aligned}$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  parametri reali. Si analizzi al variare di  $\alpha$  e  $\beta$  la stabilità dell'equilibrio nell'origine,

- i) ricorrendo al metodo della linearizzazione, e/o
- ii) all'analisi delle traiettorie.

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [1 \quad 1 \quad 0] x(t), \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

- i) Si determini, se possibile, un controllo in retroazione in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia BIBO stabile;
- ii) si determini, se possibile, un controllo in retroazione in modo tale che il risultante sistema abbia solo i modi  $e^{-2t}$  e  $te^{-2t}$ .

**Esercizio 3.** Dato il sistema lineare discreto

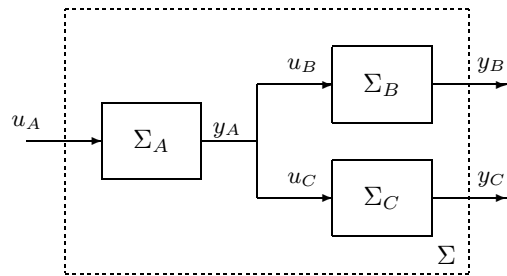
$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= H\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

si progetti, se possibile, uno stimatore dead-beat che agisca nel minor numero di passi possibile e soddisfi al seguente requisito aggiuntivo

- i) agisca solo sulla prima uscita;
- ii) agisca su entrambe le uscite, con l'ulteriore vincolo che la matrice dello stimatore abbia entrambe le colonne uguali.

**Teoria 1.** Sia  $\Sigma = (F, G, H)$  un sistema dinamico lineare di dimensione  $n$ . Si dimostri che  $\Sigma$  è un sistema raggiungibile se e solo se la matrice  $[sI_n - F \quad | \quad G]$  ha rango pieno  $n$  per ogni  $s \in \mathbb{C}$ .

**Teoria 2.** Sia  $\Sigma$  il sistema interconnesso ad un ingresso e due uscite descritto in figura.



con  $\Sigma_A$ ,  $\Sigma_B$  e  $\Sigma_C$  realizzazioni minime delle rispettive funzioni di trasferimento (scalari e strettamente proprie). Sia  $\Sigma_P$  il parallelo di  $\Sigma_B$  e  $\Sigma_C$ ,  $\Sigma_{s1}$  la serie di  $\Sigma_A$  e  $\Sigma_B$ , e, infine,  $\Sigma_{s2}$  la serie di  $\Sigma_A$  e  $\Sigma_C$  (considerate nell'ordine in cui compaiono). Si dimostri che se  $\Sigma_P$ ,  $\Sigma_{s1}$  e  $\Sigma_{s2}$  sono realizzazioni minime delle loro funzioni di trasferimento, allora  $\Sigma$  è realizzazione minima della sua matrice di trasferimento.

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [3 punti] La matrice Jacobiana del sistema in corrispondenza al generico punto di equilibrio  $(x_{1e}, x_{2e})$  è:

$$F_{\mathbf{x}_e} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(x_{1e}, x_{2e})} = \begin{bmatrix} 2\alpha x_{1e} & \beta \\ \alpha + 2\alpha\beta x_{1e} x_{2e}^3 & -\beta + 3\alpha\beta x_{1e}^2 x_{2e}^2 \end{bmatrix}.$$

Per  $(x_{1e}, x_{2e}) = (0, 0)$  tale matrice diventa

$$F_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix},$$

ed ha come polinomio caratteristico

$$\Delta_F(s) = s(s + \beta) - \alpha\beta = s^2 + \beta s - \alpha\beta.$$

In base alla regola dei segni di Cartesio, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile se  $\beta > 0$  e  $\alpha\beta < 0$ , ovvero  $\alpha < 0$  e  $\beta > 0$ . Se, invece,  $\alpha > 0$  oppure  $\beta < 0$ , l'origine è punto di equilibrio instabile. Restano da esaminare, attraverso lo studio delle traiettorie, i seguenti casi critici:

- a)  $\beta > 0$  e  $\alpha = 0$ ;
- b)  $\beta = 0$  e  $\alpha < 0$ ;
- c)  $\alpha = \beta = 0$ .

ii) [Caso a)] [3 punti] Per  $\alpha = 0$  e  $\beta > 0$  il sistema diventa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \beta x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\beta x_2(t) \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione del sistema si ricava l'espressione esplicita per  $x_2(t)$ , ovvero:

$$x_2(t) = e^{-\beta t} x_2(0).$$

Da ciò segue

$$\dot{x}_1(t) = \beta e^{-\beta t} x_2(0),$$

e quindi

$$x_1(t) = \int_0^t \beta e^{-\beta \tau} x_2(0) d\tau = -e^{-\beta \tau} x_2(0) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = (1 - e^{-\beta t}) x_2(0).$$

Da ciò segue che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = x_2(0)$$

e quindi il sistema è semplicemente stabile, ma non asintoticamente stabile.

[Caso b)] [2 punti] Per  $\alpha < 0$  e  $\beta = 0$  il sistema diventa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha x_1(t) \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Dalla prima equazione risulta evidente che la stabilità dell'equilibrio nell'origine è instabile, perchè la derivata secondo la direzione dell'asse  $x_1$  è sempre negativa, e quindi piccoli spostamenti in un intorno sinistro di 0 della prima componente innescano un allontanamento della stessa dall'origine.

[Caso c)] [1 punti] Per  $\alpha = \beta = 0$  il sistema diventa

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 0 \\ \dot{x}_2(t) &= 0 \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

ed è ovviamente semplicemente stabile.

**Esercizio 2.** i) [2.5 punti] È immediato verificare che il sistema è in forma standard di raggiungibilità, ed ha come unico autovalore del sottosistema non raggiungibile  $-2$ . Poiché il sistema è stabilizzabile, ovvero esiste una matrice di retroazione  $K$  tale che  $F + gK$  risulti asintoticamente stabile, a maggior ragione tale matrice di retroazione rende il sistema BIBO stabile. Se imponiamo, ad esempio, che gli altri due autovalori siano in  $-1$  e sfruttiamo la struttura triangolare a blocchi della matrice del sistema, otteniamo l'identità

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_0 \quad k_1 \quad k_2] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pertanto una possibile soluzione è  $K = [0 \quad -4 \quad -1]$ .

ii) [3.5 punti] Anche in questo caso possiamo sfruttare la struttura triangolare a blocchi della matrice e quindi il fatto che possiamo imporre che  $F + gK$  abbia forma di Jordan con un miniblocco di dimensione due ed uno di dimensione 1 entrambi relativi all'autovalore  $-2$ :

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_0 \quad k_1 \quad k_2] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

In questo caso si trova, dunque,  $K = [-3 \quad -6 \quad -1]$ .

**Esercizio 3.** i) [3 punti] La coppia  $(F, h_1)$ , dove

$$h_1 = [0 \quad 1 \quad 0]$$

è osservabile, giacché

$$\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_1 F \\ h_1 F^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, esiste uno stimatore dead-beat ed esso ha necessariamente indice di nilpotenza pari a 3, dal momento che per ogni  $L_1$  la coppia  $(F + L_1 h_1, h_1)$  è osservabile e quindi  $F + L_1 h_1$  è ciclica. Ponendo

$$L_1^T = [a \quad b \quad c]$$

e imponendo al polinomio caratteristico di  $F + L_1 h_1$  di essere  $z^3$  si ottiene:

$$L_1^T = [-1 \quad -1 \quad -1].$$

ii) [3 punti] Imponendo alla matrice  $L$  la seguente struttura

$$L = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \\ c & c \end{bmatrix}$$

ed eguagliando il polinomio caratteristico della matrice  $F + LH$  a  $z^3$  si ottiene  $a = b = c = -1/2$ . In corrispondenza a tale scelta l'indice di nilpotenza di  $F + LH$  è pari a 3.

**Teoria 1.** [5 punti] Si veda il testo “Appunti di Teoria dei Sistemi”, di E.Fornasini e G.Marchesini, al capitolo sulla raggiungibilità.

**Teoria 2.** [5 punti] Se  $\Sigma_P$ ,  $\Sigma_{s1}$  e  $\Sigma_{s2}$  sono realizzazioni minime delle loro funzioni di trasferimento, allora, in particolare, sono raggiungibili. Inoltre, se indico con  $n_i(z)$  e  $d_i(z)$  il numeratore ed il denominatore in una rappresentazione irriducibile di  $w_i(z)$ , funzione di trasferimento del sistema  $\Sigma_i$ , ( $i = A, B, C$ ), allora il fatto che  $\Sigma_P$  sia raggiungibile, assicura che  $d_B$  e  $d_C$  non abbiano zeri comuni, il fatto che  $\Sigma_{s1}$  e  $\Sigma_{s2}$  siano raggiungibili, assicura che  $n_A(z)$  non abbia zeri in comune nè con  $d_B$  nè con  $d_C$ .

Ora, poichè  $\Sigma$  è raggiungibile se e solo se lo è il sistema ottenuto dalla connessione in serie di  $\Sigma_A$  con  $\Sigma_P$ , dimostriamo la raggiungibilità di quest'ultimo sistema. Di fatto, la coprimalità di  $d_B$  e  $d_C$  assicura che il parallelo  $\Sigma_P$  sia realizzazione minima (e quindi raggiungibile) della sua f.d.t.

$$w_P(z) = \frac{n_B d_C + n_C d_B}{d_B d_C},$$

(ovvero  $n_B d_C + n_C d_B$  e  $d_B d_C$  sono coprimi). Ma allora,  $\Sigma_A$  e  $\Sigma_P$  sono raggiungibili e  $n_A$  e  $d_B d_C$  sono coprimi. Ciò assicura che il sistema ottenuto dalla connessione in serie di  $\Sigma_A$  con  $\Sigma_P$  sia raggiungibile e quindi anche  $\Sigma$  lo sia.

Per quanto concerne l'osservabilità, è immediato rendersi conto del fatto che se  $\Sigma_{s1}$  è osservabile allora noti  $u = u_A$  e  $y_B$  sono in grado di “osservare” gli stati iniziali  $x_A(0)$  e  $x_B(0)$ , come pure di valutare istante per istante  $y_A(t) = u_B(t) = u_C(t)$ . Ma allora, poichè il sistema  $\Sigma_C$  è osservabile e di esso conosco ingresso  $u_C$  e uscita  $y_C$ , sono in grado di osservare anche l'ultima componente,  $x_C(0)$ , dello stato complessivo di  $\Sigma$ . Pertanto  $\Sigma$  è osservabile.