I COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI - TEMA A
3 Maggio 2002

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + (1+\pi^2)y(t) = \frac{d^2u}{dt^2}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Facendo riferimento al solo dominio del tempo:

i) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{\pi - 2}{2}.$$

ii) Si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t)$.

Inoltre,

iii) si determini, se esiste, la risposta di regime permanente del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = \pi$$

e alla sollecitazione in ingresso

$$u(t) = [1 + \sin(\pi t)]\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (2+a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (2+2a)\frac{dy(t)}{dt} + 2ay(t) = \frac{d^2u}{dt^2} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con a parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

ii) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$ e facendo uso delle trasformate di Laplace, la risposta forzata del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta(t) + (a-1)e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

iii) Per $a = 0$, si tracci il diagramma di Bode della risposta in frequenza del sistema.

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$, si dimostri che per ogni segnale di ingresso $u(t), t \in \mathbb{R}$, nullo per $t < 0$, la risposta di evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t)$ è data da

$$y_f(t) = (w * u)(t) = \int_{0^-}^{t^+} w(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{0^-}^{t^+} w(\tau)u(t-\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^2 + 2s + (1+\pi^2) = 0,$$

ed ha come radici caratteristiche

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1+\pi^2)}}{2} = -1 \pm j\sqrt{\pi^2} = -1 \pm j\pi.$$

Pertanto l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate entrambe semplici. I modi elementari associati a tali radici, di molteplicità 1, sono (in forma reale) $e^{-t}\cos(\pi t)$ e $e^{-t}\sin(\pi t)$, e quindi l'evoluzione libera d'uscita generica del sistema è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t}\cos(\pi t) + c_2 e^{-t}\sin(\pi t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Nel caso specifico in esame, le condizioni iniziali assegnate si traducono nei seguenti vincoli sui coefficienti c_1 e c_2:

$$\begin{aligned}
1 &= y(0^-) = y_\ell(0^-) = c_1 \qquad \text{e} \\
\frac{\pi-2}{2} &= \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell(0^-)}{dt} \\
&= -c_1 e^{-t}\cos(\pi t) - c_1\pi e^{-t}\sin(\pi t) - c_2 e^{-t}\sin(\pi t) + c_2\pi e^{-t}\cos(\pi t)\Big|_{t=0} \\
&= -c_1 + c_2\pi.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$c_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad c_2 = 0.5,$$

da cui segue

$$y_\ell(t) = e^{-t}\cos(\pi t) + 0.5 e^{-t}\sin(\pi t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ii) [4 punti] In virtù dell'analisi portata avanti al punto i) e tenuto conto del fatto che il sistema in esame è proprio ma non strettamente (e quindi compare un impulso di Dirac nella risposta impulsiva), la risposta impulsiva assume la seguente espressione:

$$w(t) = d_0\delta(t) + (d_1 e^{-t}\cos(\pi t) + d_2 e^{-t}\sin(\pi t))\delta_{-1}(t).$$

Per valutare il valore dei coefficienti d_0, d_1 e d_2, sfruttiamo la definizione di risposta impulsiva (ovvero di risposta in evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \delta(t)$) e, a tal fine, andiamo a valutare preliminarmente il valore della derivata prima e della derivata seconda di $w(t)$. Sfruttando la proprietà di campionamento dell'impulso, si trova:

$$\begin{aligned}
\frac{dw(t)}{dt} &= d_0\delta_1(t) + d_1\delta(t) + [-d_1 e^{-t}\cos(\pi t) - d_1\pi e^{-t}\sin(\pi t) - d_2 e^{-t}\sin(\pi t) \\
&+ d_2\pi e^{-t}\cos(\pi t)]\delta_{-1}(t) \\
&= d_0\delta_1(t) + d_1\delta(t) + [(d_2\pi - d_1)e^{-t}\cos(\pi t) - (d_1\pi + d_2)e^{-t}\sin(\pi t)]\delta_{-1}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2w(t)}{dt^2} &= d_0\delta_2(t) + d_1\delta_1(t) + (d_2\pi - d_1)\delta(t) + [-(d_2\pi - d_1)e^{-t}\cos(\pi t) - \\
&- (d_2\pi - d_1)\pi e^{-t}\sin(\pi t) + (d_1\pi + d_2)e^{-t}\sin(\pi t) - (d_1\pi + d_2)\pi e^{-t}\cos(\pi t)]\delta_{-1}(t) \\
&= d_0\delta_2(t) + d_1\delta_1(t) + (d_2\pi - d_1)\delta(t) + \\
&+ [-(2d_2\pi - d_1 + d_1\pi^2)e^{-t}\cos(\pi t) - (d_2\pi^2 - d_2 - 2d_1\pi)e^{-t}\sin(\pi t)]\delta_{-1}(t).
\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza a $u(t)$ l'impulso di Dirac e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, si giunge al seguente sistema:

$$\begin{aligned}
&\Big(d_0\delta_2(t) + d_1\delta_1(t) + (d_2\pi - d_1)\delta(t) + [-(2d_2\pi - d_1 + d_1\pi^2)e^{-t}\cos(\pi t) - \\
&-(d_2\pi^2 - d_2 - 2d_1\pi)e^{-t}\sin(\pi t)]\delta_{-1}(t)\Big) + \\
&+ 2\Big(d_0\delta_1(t) + d_1\delta(t) + [(d_2\pi - d_1)e^{-t}\cos(\pi t) - (d_1\pi + d_2)e^{-t}\sin(\pi t)]\delta_{-1}(t)\Big) \\
&+ (1+\pi^2)\Big(d_0\delta(t) + (d_1e^{-t}\cos(\pi t) + d_2e^{-t}\sin(\pi t))\delta_{-1}(t)\Big) = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = \delta_2(t).
\end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti dei segnali canonici $\delta_{-1}(t), \delta(t)$, $\delta_1(t)$ e $\delta_2(t)$ ai due membri, si ottiene:

$$d_0 = 1 \qquad d_1 = -2 \qquad \text{e} \qquad d_2 = \frac{1-\pi^2}{\pi}.$$

Pertanto

$$w(t) = \delta(t) + \left(-2e^{-t}\cos(\pi t) + \frac{1-\pi^2}{\pi}e^{-t}\sin(\pi t)\right)\delta_{-1}(t).$$

iii) [4 punti] Il sistema è asintoticamente stabile, dal momento che le radici dell'equazione caratteristica sono entrambe a parte reale minore di zero. Pertanto ha senso parlare di risposta a regime permanente al segnale di ingresso assegnato $u(t)$ a partire da arbitrarie condizioni inziali. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + (1+\pi^2)},$$

e, pertanto, la sua risposta in frequenza è

$$W(j\omega) = \frac{-\omega^2}{(1+\pi^2-\omega^2) + j2\omega}.$$

Dalla teoria sappiamo che la risposta di regime permanente al segnale di ingresso dato è

$$y_{rp}(t) = \Big(W(0) + |W(j\pi)|\sin(\pi t + \arg(W(j\pi))\Big)\delta_{-1}(t).$$

Pertanto si tratta di valutare, semplicemente, $W(0), |W(j\pi)|$ e $\arg(W(j\pi))$. Si trova, allora,

$$W(0) = 0 \qquad W(j\pi) = \frac{-\pi^2}{1+j2\pi},$$

da cui segue

$$|W(j\pi)| = \frac{\pi^2}{\sqrt{1+4\pi^2}} \qquad \arg(W(j\pi)) = 180^o - \text{arctg}(2\pi).$$

Esercizio 2. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^3 + (2+a)s^2 + (2+2a)s + 2a = 0.$$

Per valutare al variare di a la collocazione delle radici e, specificatamente, se il polinomio in esame è di Hurwitz o meno, possiamo applicare il criterio di Routh. La tabella corrispondente a questo polinomio è:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (2+2\,\mathrm{a}) \\ 2 & (2+\mathrm{a}) & 2\mathrm{a} \\ 1 & \dfrac{4+4a+2a^2}{2+a} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{a} & 0 \end{array}$$

È immediato rendersi conto del fatto che la prima colonna della tabella ha tutti gli elementi di ugual segno (positivo) se e solo se $a > 0$. In tal caso il polinomio è di Hurwitz. In tutti gli altri casi, invece, ha almeno uno zero nel semipiano $\mathrm{Re}(s) \geq 0$. Non è difficile verificare, inoltre, che

$$s^3 + (2+a)s^2 + (2+2a)s + 2a = (s+a)(s^2+2s+2).$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, ovviamente per $a > 0$ il sistema, essendo asintoticamente stabile è pure BIBO stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2-1}{(s+a)(s^2+2s+2)}.$$

Poichè gli zeri al numeratore sono ± 1, è evidente che ci può essere stabilità BIBO senza stabilità asintotica se e solo se esiste un valore del parametro a per cui il polinomio al denominatore nella precedente rappresentazione della funzione di trasferimento ha uno zero in 1 e i rimanenti due zeri nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$. Dalla nostra fattorizzazione del denominatore (e alla luce della regola dei segni di Cartesio) la soluzione è ovvia e porta al valore $a = -1$. In assenza di una fattorizzazione esplicita è sufficiente imporre

$$s^3 + (2+a)s^2 + (2+2a)s + 2a\Big|_{s=1} = 1 + 2 + a + 2 + 2a + 2a = 0.$$

Si trova, allora, $a = -1$. Per tale valore di a il polinomio al denominatore fattorizza nella forma $(s-1)(s^2+2s+2)$ e pertanto la funzione di trasferimento, in forma irriducibile, diventa

$$W(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}.$$

Chiaramente tale funzione di trasferimento ha tutti i poli nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$ e pertanto il sistema è BIBO stabile.

ii) [4 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso

$$u(t) = \delta(t) + (a-1)e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

è

$$U(s) = 1 + \frac{a-1}{s+1} = \frac{s+a}{s+1}, \qquad \mathrm{Re}(s) > -1.$$

Dalla teoria è noto che la trasformata di Laplace $Y_f(s)$ del segnale di uscita in evoluzione forzata, $y_f(t)$, è legato alla trasformata di Laplace del segnale di ingresso dalla relazione

$$Y_f(s) = W(s)U(s),$$

e quindi

$$Y_f(s) = \frac{s^2-1}{(s+a)(s^2+2s+2)}\frac{s+a}{s+1} = \frac{s-1}{s^2+2s+2}.$$

Per determinare l'espressione dell'uscita nel dominio del tempo, dobbiamo antitrasformare la funzione razionale strettamente propria $Y_f(s)$ usando l'algoritmo illustrato, che passa attraverso l'espansione in fratti semplici. Notiamo che il polinomio al denominatore ha due radici complesse coniugate collocate in $-1 \pm j$. Pertanto possiamo scrivere,

$$Y_f(s) = \frac{A}{s+1+j} + \frac{B}{s+1-j}.$$

Essendo le radici semplici, possiamo calcolare A e B attraverso un'operazione di limite. Si trova:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s\to -1-j} Y_f(s)(s+1+j) = \lim_{s\to -1-j} \frac{s-1}{s+1-j} = \frac{-2-j}{-2j} = \frac{1}{2} - j \\ B &= \lim_{s\to -1+j} Y_f(s)(s+1-j) = \lim_{s\to -1+j} \frac{s-1}{s+1+j} = \frac{-2+j}{2j} = \frac{1}{2} + j. \end{aligned}$$

Si trova, quindi,

$$Y_f(s) = \frac{2+j}{2j}\frac{1}{s+1+j} - \frac{2-j}{2j}\frac{1}{s+1-j},$$

da cui segue immediatamente

$$y_f(t) = \frac{2+j}{2j}e^{-(1+j)t} - \frac{2-j}{2j}e^{-(1-j)t} = e^{-t}(\cos t - 2\sin t)\delta_{-1}(t).$$

iii) [6 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2-1}{s(s^2+2s+2)}.$$

Per la determinazione del diagramma di Bode della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento assegnata, mettiamo, preliminarmente, la risposta in frequenza nella forma di Bode. Da

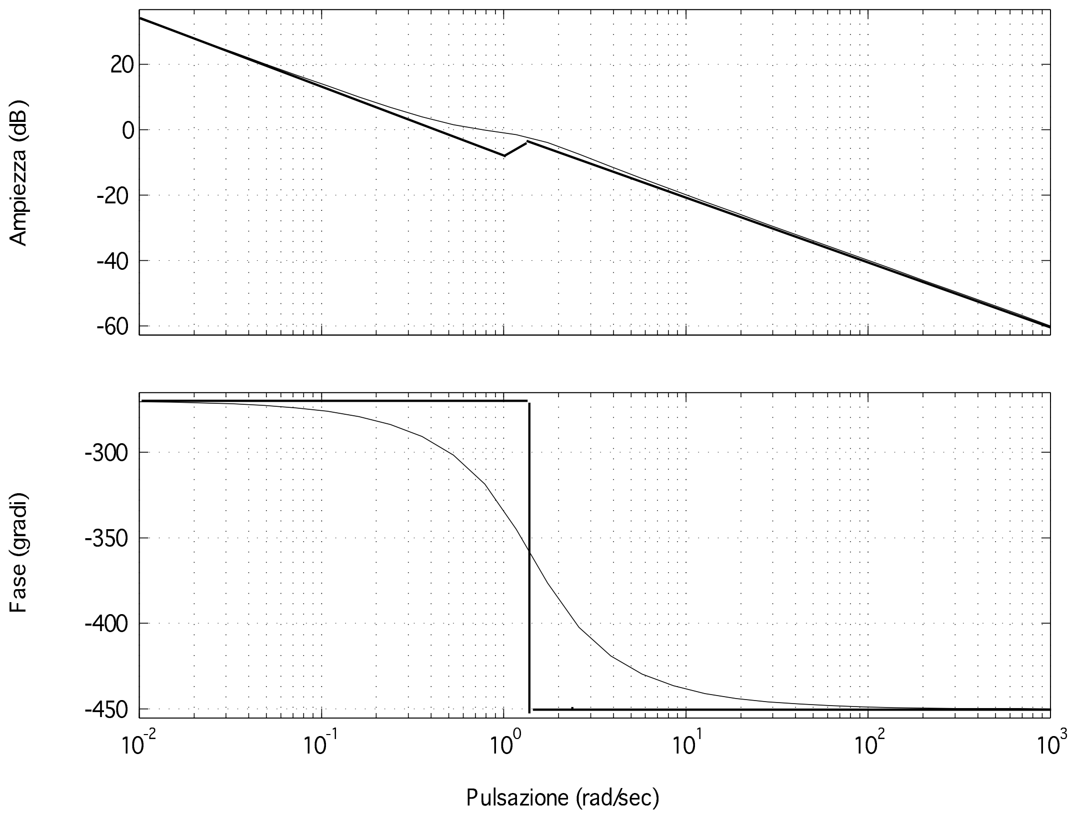
$$W(j\omega) = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-j\omega)(1+j\omega)}{j\omega(1-\frac{\omega^2}{2}+j\omega)}$$

si ricava che il guadagno di Bode è

$$K_B = -0.5.$$

Inoltre, nella risposta in frequenza compaiono: un polo nell'origine, due termini binomi relativi a due zeri semplici collocati in 1 e -1, e un termine trinomio, relativo ad una coppia di poli complessi coniugati, con pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{2}$ e coefficiente di smorzamento $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono quelli riportati nelle figure sottostanti.



Teoria. [5 punti] Si veda la Proposizione 2.5.2 e la relativa prova alle pagine 32-33 del libro di testo.