II COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI - TEMA B
10 Giugno 2002

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s-10}{(s+1000)(s+0.01)}.$$

i) Si determini la risposta al gradino del sistema, se ne tracci il grafico e si determini (almeno in maniera approssimativa) il valore dei suoi parametri caratteristici (tempo di salita, tempo di assestamento e sovraelongazione).

ii) Si determini il diagramma di Bode delle ampiezze della risposta in frequenza del sistema e si determini (almeno in maniera approssimativa) il valore dei suoi parametri caratteristici (banda passante a 3 dB, pulsazione di risonanza e picco di risonanza relativo).

iii) Si tracci il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$.

iv) Si valuti la stabilità BIBO del sistema (di funzione di trasferimento $W(s)$) ottenuto per retroazione unitaria negativa dal sistema di partenza, facendo uso del criterio di Nyquist.

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1-3s}{s(s^2+2s+2)}.$$

Supponendo di applicare un'azione di controllo puramente proporzionale $C(s) = K, K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nella catena di azione diretta, si studi al variare di K la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, evidenziando gli eventuali valori critici del parametro K,

i) facendo uso della tabella di Routh e

ii) facendo uso della famiglia dei diagrammi di Nyquist di $G(j\omega)$ (parametrizzata su K).

Esercizio 3. Si consideri il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{(s+2)^2}.$$

Si progetti un controllore $C(s)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 0 con errore di regime permanente non superiore a $e^*_{rp} = 0.092$;

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega^*_A = 1$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

SOLUZIONI

Nota: per le figure vedere il file .pdf relativo. Nelle figure 3 e 4 - che sono valide per il Tema A - sostituire $\bar{\omega}_1$ e $\bar{\omega}_2$ rispettivamente a $\bar{\omega}$ e $1/\bar{\omega}$.

Esercizio 1. i) [3 punti] La trasformata di Laplace del gradino è $U(s) = 1/s$. Pertanto la trasformata di Laplace della risposta al gradino è:

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{s-10}{s(s+1000)(s+0.01)}.$$

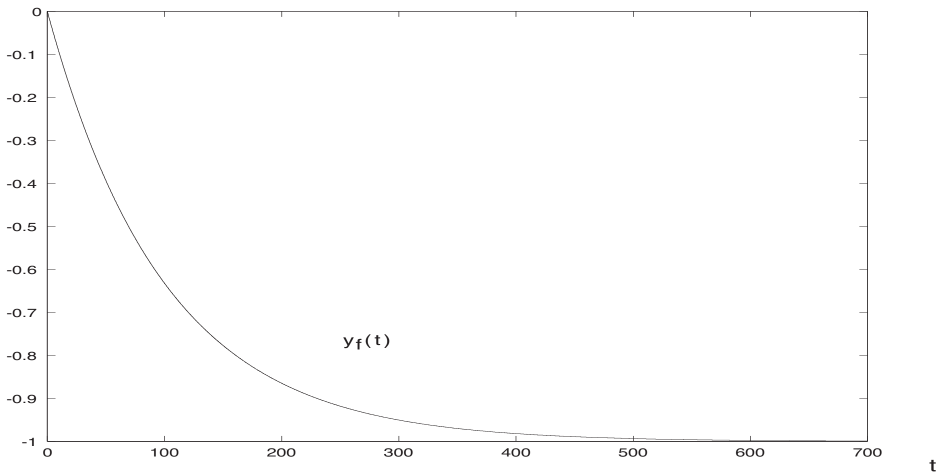
Ricorrendo allo sviluppo in fratti semplici otteniamo

$$Y_f(s) \approx -\frac{1}{s} - 0.001\frac{1}{s+1000} + \frac{1}{s+0.01}$$

e, antitrasformando, si ottiene

$$y_f(t) \approx (-1 - 0.001e^{-1000t} + e^{-0.01t})\delta_{-1}(t).$$

L'andamento della risposta al gradino è il seguente:



Dal punto di vista della determinazione dei parametri caratteristici è evidente, in primo luogo, che, in virtù dell'andamento monotono della risposta al gradino, tempo di salita e tempo di assestamento coincidono e non vi è sovraelongazione. Per la determinazione numerica del parametro $t_r = t_s$ possiamo adottare una descrizione approssimata della risposta al gradino, giustificata dal fatto che i due esponenziali presenti nell'espressione di $y_f(t)$ hanno costanti di tempo e pesi molto diversi. Si trova pertanto

$$y_f(t) \approx (-1 + e^{-0.001t})\delta_{-1}(t).$$

Pertanto $t_r = t_s$ soddisfa l'equazione

$$-0.9 = y_f(t_r) = -1 + e^{-0.01t_r}$$

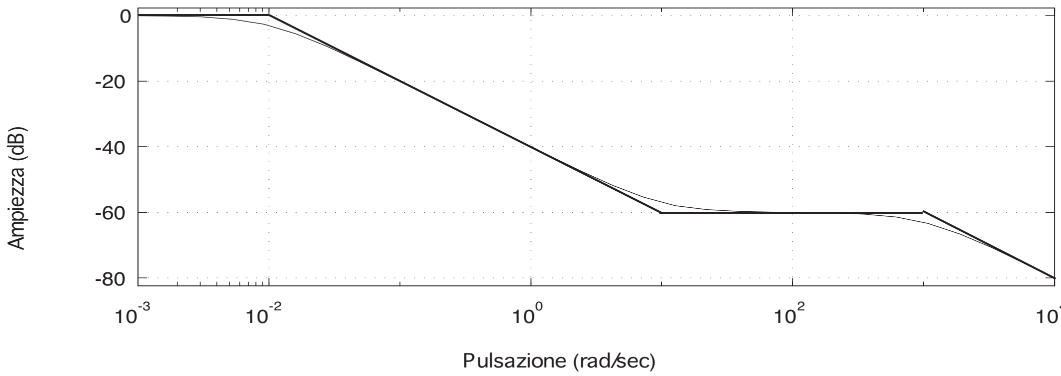
e vale, quindi,

$$t_r \approx 100 \ln 10.$$

ii) [3 punti] Lo studio del diagramma di Bode delle ampiezze della risposta in frequenza del sistema

$$G(j\omega) = \frac{j\omega - 10}{(j\omega + 1000)(j\omega + 0.01)} = -1 \; \frac{1 - 0.1j\omega}{(1 + 0.001j\omega)(1 + 100j\omega)}$$

fornisce



L'andamento monotono della risposta in frequenza ci permette di dire che non ci sono nè pulsazione di risonanza nè picco di risonanza relativo. Per valutare la banda passante, vista la distanza reciproca di poli e zeri, possiamo utilizzare come rappresentazione approssimata della risposta in frequenza la seguente:

$$G(j\omega) \approx -1 \; \frac{1}{1 + 100j\omega}.$$

pertanto la banda passante a 3 dB, B_p, si trova imponendo

$$|G(jB_p)| \approx \frac{1}{\sqrt{1 + (100B_p)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ciò porta a $B_p \approx 0.01$.

iii) [4 punti] Riscriviamo la $G(j\omega)$ evidenziandone parte reale e parte immaginaria.

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{j\omega - 10}{(j\omega + 1000)(j\omega + 0.01)} = \frac{(j\omega - 10)(-j\omega + 1000)(-j\omega + 0.01)}{(\omega^2 + 10^6)(\omega^2 + 10^{-4})} \\ &\approx \frac{(1000\omega^2 - 100) + j\omega(10000 - \omega^2)}{(10^6 + \omega^2)(10^{-4} + \omega^2)}. \end{aligned}$$

È immediato rendersi conto del fatto che

$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{1000\omega^2 - 100}{(10^6 + \omega^2)(10^{-4} + \omega^2)} \qquad \mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = \frac{\omega(10000 - \omega^2)}{(10^6 + \omega^2)(10^{-4} + \omega^2)}.$$

Pertanto, posto $\bar{\omega}_1 := \sqrt{0.1}$ e $\bar{\omega}_2 := 100$, si ha

$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 \le \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1, \end{cases}$$

mentre

$$\mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 \le \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2. \end{cases}$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}$ e $\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} &= -1 \\ \lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Im}\{G(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Im}\{G(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\begin{aligned} \arg\{G(j\omega)\} &= \arg\left(-1\frac{1-0.1j\omega}{(1+0.001j\omega)(1+100j\omega)}\right) \\ &= \arg\left(-1 \cdot (1-0.1j\omega)\right) - \arg\left(1+0.001j\omega\right) - \arg\left(1+100j\omega\right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to 0^+} \arg\{G(j\omega)\} &= 180^o \\ \lim_{\omega \to +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= -90^o. \end{aligned}$$

tenuto conto del fatto che il comportamento per $\omega < 0$ si trova per simmetria, rovesciando la porzione di diagramma relativa a pulsazione non negative, il diagramma di Nyquist della $G(j\omega)$ risulta, pertanto, illustrato in Figura 3 e val la pena di evidenziare che tale diagramma si mantiene tutto al finito (infatti $G(s)$ non presenta poli sull'asse immaginario) ma passa per il punto $-1 + j0$ (di fatto ci si trova per $\omega = 0$).

iv) [2 punti] Per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist, è necessario ovviare all'inconveniente del passaggio del diagramma per il punto $-1 + j0$ attraverso il ricorso ad un percorso di Nyquist che, sull'asse immaginario, bypassi l'origine (giacchè $G(j\omega) = -1$ per $\omega = 0$), descrivendo una semicirconferenza che lasci l'origine a sinistra. La conseguenza di tale accorgimento è un diagramma di Nyquist modificato come illustrato in Figura 4.

Da ciò emerge chiaramente che il diagramma non compie nessun giro alltorno al punto $-1 + j0$, ovvero $N = 0$. Poichè $G(s)$ è BIBO stabile e quindi $n_{G+} = 0$, ne consegue che $n_{W+} = 0$, ovvero la funzione di trasferimento del sistema retroazionato $W(s)$ ha un polo nell'origine (e quindi non è BIBO stabile) e i rimanenti poli nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$. Lo verifichiamo attraverso il calcolo diretto della $W(s)$. Si trova, infatti,

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{s-10}{(s+1000)(s+0.01)+(s-10)} = \frac{s-1}{s^2+1001.01s} = \frac{s-1}{s(s+1001.01)}.$$

Esercizio 2. i) [3 punti] Posto

$$n(s) := 1 - 3s \qquad d(s) := s(s^2 + 2s + 2),$$

la funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa risulta

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{Kn(s)}{d(s) + Kn(s)},$$

ed essendo $n(s)$ e $d(s)$ coprimi, anche $Kn(s)$ e $d(s) + Kn(s)$ lo sono per ogni scelta di $K \neq 0$. Pertanto i poli della $W(s)$ coincidono con gli zeri di $d(s) + Kn(s)$. Per capire se $W(s)$ è BIBO stabile è allora sufficiente appurare, mediante la tabella di Routh, per quali valori di K il polinomio $d(s) + Kn(s) = s^3 + 2s^2 + (2 - 3K)s + K$ è di Hurwitz.

La tabella corrispondente a questo polinomio è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & \text{2-3K} \\
2 & 2 & \text{K} \\
1 & \dfrac{4 - 7K}{2} & 0 \\
0 & \text{K} & 0
\end{array}$$

È immediato rendersi conto del fatto che la prima colonna della tabella ha tutti gli elementi di ugual segno (positivo) se e solo se $4/7 > K > 0$. In tal caso il polinomio è di Hurwitz. In tutti gli altri casi, invece, ha almeno uno zero nel semipiano $\mathrm{Re}(s) \geq 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se $0 < K < 4/7$. I valori $K = 0$ e $K = 4/7$ sono i valori critici del parametro.

ii) [7 punti] Per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist andiamo a valutare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento in catena aperta

$$KG(s) = K \, \frac{1 - 3s}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

per valori di K positivi e negativi. Da

$$KG(j\omega) = K \, \frac{1 - 3j\omega}{j\omega(2 - \omega^2 + j2\omega)} = \frac{K\omega(3\omega^2 - 8) + jK(7\omega^2 - 2)}{\omega[(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2]}$$

segue

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \frac{K(3\omega^2 - 8)}{[(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2]} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{K(7\omega^2 - 2)}{\omega[(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2]}.$$

Pertanto, posto $\bar{\omega}_1 := \sqrt{8/3}$ e $\bar{\omega}_2 := \sqrt{2/7}$, si ha per $K > 0$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2. \end{cases}$$

Invece, per $K < 0$, si ha

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_1$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{1.5K}{\sqrt{8/3}} = \frac{1.5K}{\bar{\omega}_1} = \begin{cases} > 0 & \text{se } K > 0; \\ < 0 & \text{se } K < 0. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_2$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = -\frac{7K}{4} = \begin{cases} < 0 & \text{se } K > 0; \\ > 0 & \text{se } K < 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = 0.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\}$ e $\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= -2K \\ \lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= -\mathrm{sgn}(K)\infty \\ \lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\begin{aligned} \arg KG(j\omega) &= \arg\left(\frac{K}{2} \, \frac{1 - 3j\omega}{j\omega\left(1 - \frac{\omega^2}{2} + j\omega\right)} \right) \\ &= \arg\left(\frac{K}{1} \cdot (1 - 3j\omega) \right) - \arg\left(j\omega \left(1 - \frac{\omega^2}{2} + j\omega \right) \right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to 0^+} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} -90^o & \text{se } K > 0; \\ 90^o & \text{se } K < 0; \end{cases} \\ \lim_{\omega \to +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} 0^o & \text{se } K > 0; \\ 180^o & \text{se } K < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che il comportamento per $\omega < 0$ si trova per simmetria, rovesciando la porzione di diagramma relativa a pulsazione non negative, il diagramma di Nyquist di $KG(j\omega)$ risulta, pertanto, illustrato per $K > 0$ in Figura 5 e per $K < 0$ in Figura 6.

Risulta allora evidente, dal primo diagramma, che

- per $-1 < -7K/4$ (ovvero $K < 4/7$), e chiaramente $K > 0$, $N = 0$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile;
- per $-1 > -7K/4$ (ovvero $K > 4/7$), $N = -2$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato è instabile;
- per $-1 = -7K/4$ (ovvero $K = 4/7$), si ha passaggio per il punto critico $-1 + j0$. Ciò ci permette di dire che $W(s)$ ha due poli a parte reale nulla (complessi coniugati) e pertanto il sistema retroazionato è instabile. Se adottiamo un percorso di Nyquist modificato, in modo da evitare il punto $-1 + j0$, ci rendiamo conto che $N = 0$ e quindi $W(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.

Nel caso del secondo diagramma, invece, è evidente che per ogni scelta di K si ha $N = -1$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato è instabile.

Esercizio 3. [8 punti] Poichè viene richiesto che il tipo del sistema sia 0 non è necessario introdurre poli nell'origine. Provvediamo allora, come prima cosa, ad attribuire al guadagno di Bode del controllore un valore che assicuri il rispetto del vincolo sull'errore di regime permanente. Poichè è noto che l'errore di regime permanente di un sistema di tipo 0 è espresso dalla formula

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)K_B(G)},$$

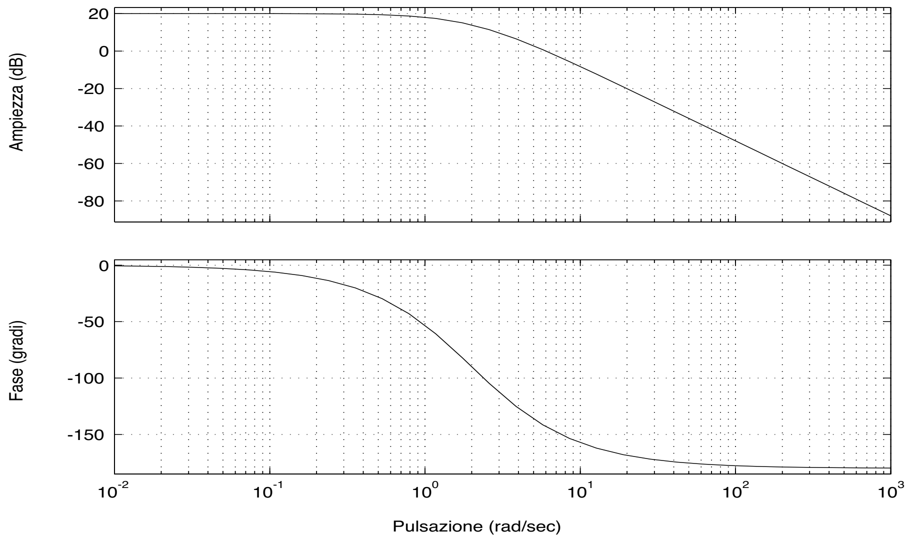
dove $K_B(C)$ e $K_B(G)$ rappresentano, rispettivamente, il guadagno di Bode del controllore e del processo, il vincolo su $K_B(C)$ diventa

$$\frac{1}{1 + K_B(C)K_B(G)} = \frac{1}{1 + K_B(C)\frac{10}{4}} \leq 0.092.$$

Da ciò segue

$$1 + \frac{10K_B(C)}{4} \geq 10.869,$$

ovvero $K_B(C) \geq 3.947$. Scegliamo allora, preliminarmente, $C(s) = K_B(C) = 4$ e andiamo a valutare pulsazione di attraversamento e margine di fase per la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s) = 10\ \frac{1}{(1+0.5s)^2}$. Graficamente si trova



ed è immediato rendersi conto del fatto che, essendo K_B espresso in dB pari a 20 ed essendo 2 il punto di spezzamento relativo al polo doppio, la pulsazione ω_A si trova a metà tra $2 \cdot 10^0$ e $2 \cdot 10^1$, ovvero in corrispondenza a $2 \cdot 10^{1/2} \approx 6.32$ rad/sec, mentre il margine di fase in corrispondenza alla pulsazione $\omega_A^* = 1$ rad/sec è superiore a 90^o, giacchè in corrispondenza a $\omega = 2$ rad/sec la fase effettua la transizione da 0^o a -180^o assumendo il valore intermedio -90^o. Per compensare il fatto che $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) > m_\psi^* := 45^o$ potremmo utilizzare un'azione attenuatrice. Da un punto di vista intuitivo, però, possiamo pervenire al risultato desiderato semplicemente "cancellando" uno dei due poli in -2 e rimpiazzandolo con un polo collocato in -0.1. In questo modo, infatti, il diagramma asintotico dei moduli attraversa l'asse delle ascisse esattamente in corrispondenza alla pulsazione $\omega_A^* = 1$ rad/sec (e quindi la vera pulsazione di attraversamento è circa ω_A^*). Inoltre, per $\omega_A = 2$ rad/sec la fase subisce una transizione da -90^o a -180^o assumendo il valore intermedio -135^o che corrisponde proprio ad un margine di fase di 45^o. Ciò assicura che il margine di fase per $\omega_A^* = 1$ rad/sec sia maggiore di 45^o.

Quanto descritto equivale ad introdurre un compensatore del seguente tipo:

$$C'(s) = \frac{1 + 0.5s}{1 + 10s},$$

e pertanto il compensatore complessivo risulta

$$C(s) = K_B(C)C'(s) = 4\,\frac{1 + 0.5s}{1 + 10s}.$$