

COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI

26 Luglio 2002

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + ax_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= ax_2(t)(1 + x_1(t)), \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si determinino, al variare di a in \mathbb{R} , i punti di equilibrio del sistema, e
- ii) se ne studi la stabilità ricorrendo, ove possibile, al metodo della linearizzazione.
- iii) Negli eventuali casi indecidibili, evidenziati dal criterio di linearizzazione, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine mediante l'analisi delle traiettorie del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [1 \quad a \quad 1]x(t),\end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si progetti, se possibile e al variare di a , un controllore in retroazione K , in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia come polinomio caratteristico

$$\Delta_{F+gK}(z) = z(z - 1/2)(z - 1/4).$$

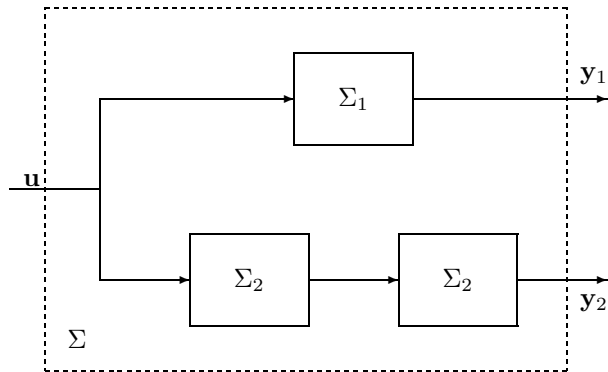
- ii) Si determini, se possibile e al variare di a , l'insieme dei controllori dead-beat che portano ad una matrice $F + gK$ con indice di nilpotenza esattamente 3, esattamente 2 ed esattamente 1.
- iii) Si determini al variare di a , la dimensione del sottospazio che è al contempo raggiungibile ed osservabile.

Esercizio 3. Si considerino le funzioni di trasferimento razionali scalari

$$w_1(s) = \frac{s}{s^2 - 1} \quad w_2(s) = \frac{s^2 + 4s}{s^3 + 5s^2 + 4s}.$$

- i) Si determinino due sistemi a tempo continuo, $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$, che siano realizzazioni minime rispettivamente di w_1 e w_2 .

Si consideri il sistema Σ , ottenuto dalla connessione dei sistemi Σ_1 e Σ_2 come illustrato in figura.



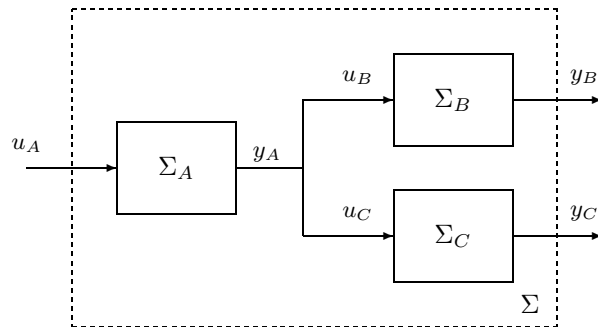
ii) Si discuta raggiungibilità ed osservabilità di Σ .

Teoria 1. Sia

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad t \in \mathbb{N},$$

un sistema dinamico a tempo discreto di dimensione n , ad m ingressi, e siano x_0 e x_f due arbitrari stati in \mathbb{R}^n . Supponendo il sistema non raggiungibile, si illustri la procedura per verificare se esiste un ingresso di controllo che porta lo stato del sistema da x_0 per $t = 0$ a x_f per $t = n$, e qualora tale ingresso esista se ne determini l'espressione generica.

Teoria 2. Sia Σ il sistema interconnesso ad un ingresso e due uscite descritto in figura.



con Σ_A , Σ_B e Σ_C realizzazioni minime delle rispettive funzioni di trasferimento (scalari e strettamente proprie). Sia Σ_P il parallelo di Σ_B e Σ_C , Σ_{s1} la serie di Σ_A e Σ_B , e, infine, Σ_{s2} la serie di Σ_A e Σ_C (considerate nell'ordine in cui compaiono). Si dimostri che se Σ_P , Σ_{s1} e Σ_{s2} sono realizzazioni minime delle loro funzioni di trasferimento, allora Σ è realizzazione minima della sua matrice di trasferimento.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] I punti di equilibrio del sistema sono le soluzioni del sistema di equazioni algebriche

$$\begin{aligned}0 &= -x_1 + ax_1x_2 = x_1(ax_2 - 1) \\0 &= ax_2(1 + x_1).\end{aligned}$$

La prima equazione ha due soluzioni: 1) $x_1 = 0$ per ogni valore di a e 2) $x_2 = 1/a$ per $a \neq 0$. Sostituendo la prima soluzione nella seconda equazione si ottiene

$$0 = ax_2$$

le cui soluzioni sono 1a) $x_2 = 0$ per $a \neq 0$ e 1b) $x_2 \in \mathbb{R}$ per $a = 0$.

In corrispondenza alla soluzione $x_2 = 1/a$ (per $a \neq 0$) della prima equazione, la seconda equazione diventa

$$0 = 1 + x_1,$$

ed ha come unica soluzione $x_1 = -1$. Pertanto i punti di equilibrio del sistema sono:

- per $a = 0$ $\mathbf{x}_e = (0, x_2)$, $x_2 \in \mathbb{R}$;
- per $a \neq 0$ $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ e $\mathbf{x}_e = (-1, \frac{1}{a})$.

ii) [3 punti] La matrice Jacobiana del sistema in corrispondenza al generico punto di equilibrio (x_{1e}, x_{2e}) è:

$$F_{\mathbf{x}_e} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_{1e}, x_{2e})} = \begin{bmatrix} -1 + ax_{2e} & ax_{1e} \\ ax_{2e} & a(1 + x_{1e}) \end{bmatrix}.$$

Per $(x_{1e}, x_{2e}) = (0, 0)$ e $a \neq 0$ tale matrice diventa

$$F_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

ed ha come autovalori -1 e a . Pertanto, in base al criterio ridotto di Lyapunov, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare di partenza per $a < 0$ e punto di equilibrio instabile per $a > 0$.

Per $(x_{1e}, x_{2e}) = (-1, 1/a)$ ($a \neq 0$) la matrice Jacobiana diventa

$$F_{(-1, 1/a)} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ed ha come polinomio caratteristico $s^2 + a$. Pertanto il punto $(-1, 1/a)$ è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare di partenza se $a < 0$. Il caso $a > 0$ è indecidibile per linearizzazione.

Per $(x_{1e}, x_{2e}) = (0, x_{2e})$, $x_{2e} \in \mathbb{R}$, $a = 0$, tale matrice diventa

$$F_{(0, x_{2e})} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ed ha come autovalori -1 e 0 . Pertanto, si tratta di un caso indecidibile per linearizzazione.

iii) [2 punti] L'unico caso indecidibile per linearizzazione nello studio dell'equilibrio nell'origine è il caso $a = 0$. Per tale valore del parametro a le equazioni del sistema diventano

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 0, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Pertanto, per $a = 0$, il sistema è (lineare e) semplicemente stabile e quindi l'origine (e tutti i punti di equilibrio $(0, x_{2e})$) è punto di equilibrio semplicemente stabile.

Esercizio 2. i) [2 punti] La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed ha, pertanto, rango 1. Ciò significa che il sistema non è raggiungibile ed il suo sottosistema non raggiungibile ha dimensione 2. Poichè polinomio caratteristico della matrice F è

$$\Delta_F(z) = z[(z-1)^2 - 1] = z^2(z-2)$$

il polinomio caratteristico della matrice F_{22} del sottosistema non raggiungibile sarà

$$\Delta_{F_{22}}(z) = z^2$$

oppure

$$\Delta_{F_{22}}(z) = z(z-2).$$

Nessuno dei 2 divide il polinomio caratteristico assegnato e pertanto non esiste un controllore in retroazione che attribuisce alla matrice del sistema retroazionato il polinomio caratteristico desiderato.

ii) [5 punti] È necessario, a questo punto, valutare in modo esatto gli autovalori del sottosistema non raggiungibile. Dal momento che $\Delta_F(z) = z^2(z-2)$, il sistema ammette controllori dead-beat se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità del sistema non perde rango in corrispondenza all'autovalore 2. Ciò è verificato dal momento che

$$[zI_3 - F \mid g]_{z=2} = \left[\begin{array}{ccc|c} z-1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & z-1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & z & 0 \end{array} \right]_{z=2} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

ha rango 3.

La soluzione più semplice consiste nello scrivere il controllore K in forma parametrica

$$K = [k_0 \quad k_1 \quad k_2]$$

e nell'imporre alla matrice $F + gK$ polinomio caratteristico z^3 . Successivamente valuteremo, al variare dei parametri che rendono soddisfatta tale condizione, qual'è l'indice di nilpotenza attribuito alla matrice $F + gK$. Si trova

$$F + gK = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_0 \quad k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} 1+k_0 & 1+k_1 & 1+k_2 \\ 1+k_0 & 1+k_1 & a+k_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\Delta_{F+gK}(z) = z^2[z - (2 + k_0 + k_1)].$$

Pertanto i controllori dead-beat per il sistema sono tutti e soli quelli del tipo

$$K = [k_0 \quad -(2 + k_0) \quad k_2]$$

al variare di k_0 e k_2 in \mathbb{R} . La matrice $F + gK$ diventa allora

$$F + gK = \begin{bmatrix} 1+k_0 & -(1+k_0) & 1+k_2 \\ 1+k_0 & -(1+k_0) & a+k_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice può presentare indice di nilpotenza 1 (ovvero essere la matrice nulla) se e solo se $a = 1$ e $k_0 = k_2 = -1$. Se $a \neq 1$ non c'è modo di attribuire alla matrice indice di nilpotenza 1.

Per valutare i controllori che attribuiscono indice di nilpotenza 2 alla matrice è sufficiente elevare $F + gK$ al quadrato. Si trova, allora,

$$(F + gK)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1 + k_0)(1 - a) \\ 0 & 0 & (1 + k_0)(1 - a) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da ciò segue che, per $a = 1$, ogni scelta di k_0 (e di k_2) va bene e attribuisce come indice di nilpotenza alla matrice $F + gK$ (almeno) 2. Per essere sicuri di avere indice di nilpotenza esattamente 2 devo escludere la soluzione $k_0 = k_2 = -1$ determinata prima. Per $a \neq 1$, invece, ottengo indice di nilpotenza esattamente 2 imponendo $k_0 = -1$ e k_2 arbitrario. Infine, ogni altra scelta di k_0 e k_2 nel caso $a \neq 1$ attribuirà alla matrice $F + gK$ indice di nilpotenza 3. Per $a = 1$ tale indice di nilpotenza non è ottenibile per nessuna scelta dei parametri.

iii) [3 punti] La dimensione del sottosistema raggiungibile e osservabile coincide con la dimensione minima di realizzazione della funzione di trasferimento del sistema e tale dimensione la possiamo valutare osservando il grado del polinomio al denominatore in una rappresentazione irriducibile della funzione di trasferimento. La funzione di trasferimento del sistema è

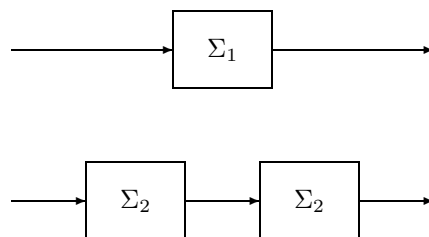
$$w(z) = H(zI_3 - F)^{-1}g = \frac{1 + a}{z - 2}.$$

Da ciò emerge chiaramente che per $a \neq -1$ la dimensione minima di realizzazione è pari a 1, mentre per $a = -1$ la dimensione minima di realizzazione è 0.

Esercizio 3. i) [2 punti] Una volta che per entrambe le funzioni ci siamo ricondotti ad una rappresentazione irriducibile (ciò richiede, nel caso di $w_2(s)$, di effettuare la semplificazione del polinomio $s(s + 4)$, divisore comune di numeratore e denominatore), è immediato riconoscere nel grado del denominatore la dimensione minima di realizzazione, ovvero 2 per w_1 e 1 per w_2 . Se scegliamo delle realizzazioni in forma canonica di controllo, ad esempio, otteniamo:

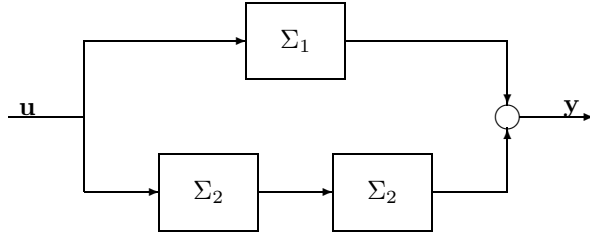
$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [0 \quad 1] \right) \\ \Sigma_2 &= (-1, 1, 1) \end{aligned}$$

ii) [4 punti] Dal punto di vista dell'osservabilità il sistema Σ è equivalente ai due sistemi indipendenti di figura.



Poichè Σ_1 è osservabile, in quanto realizzazione minima della sua funzione di trasferimento, il sistema complessivo è osservabile se e solo se la cascata di due copie di Σ_2 è osservabile. Essendo le realizzazioni minime e non potendo subentrare cancellazioni incrociate, la risposta è senz'altro affermativa.

Dal p.d.v. della raggiungibilità, invece, il sistema Σ è equivalente parallelo di Σ_1 con la cascata di due copie di Σ_2 : dal p.d.v. della raggiungibilità, infatti, l'esistenza di due uscite distinte \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 non è rilevante, per cui possiamo pensare di convogliare le due uscite in un sommatore ottenendo l'uscita \mathbf{y} .



Σ_1 è raggiungibile in quanto realizzazione minima della sua funzione di trasferimento. La serie di due copie di Σ_2 è raggiungibile in quanto sono entrambe raggiungibili e non subentrano cancellazioni tra $H_2 \text{adj}(sI - F_2)g_2$ e $\det(sI - F_2)$. Inoltre la matrice del sistema serie in questione è

$$\begin{bmatrix} F_2 & 0 \\ g_2 H_2 & F_2 \end{bmatrix}$$

e quindi lo spettro della matrice del sistema serie è $\Lambda(F_2) \cup \Lambda(F_2)$. Poichè

$$\Lambda(F_1) \cap (\Lambda(F_2) \cup \Lambda(F_2)) = \{-1\},$$

il sistema parallelo in questione non è raggiungibile e pertanto nemmeno il nostro sistema Σ di partenza.

Teoria 1. [4 punti] Si veda il testo "Appunti di Teoria dei Sistemi", di E.Fornasini e G.Marchesini, nel capitolo sulla Raggiungibilità.

Teoria 2. [4 punti] Se Σ_P , Σ_{s1} e Σ_{s2} sono realizzazioni minime delle loro funzioni di trasferimento, allora, in particolare, sono raggiungibili. Inoltre, se indico con $n_i(z)$ e $d_i(z)$ il numeratore ed il denominatore in una rappresentazione irriducibile di $w_i(z)$, funzione di trasferimento del sistema Σ_i , ($i = A, B, C$), allora il fatto che Σ_P sia raggiungibile, assicura che d_B e d_C non abbiano zeri comuni, il fatto che Σ_{s1} e Σ_{s2} siano raggiungibili, assicura che $n_A(z)$ non abbia zeri in comune nè con d_B nè con d_C .

Ora, poichè Σ è raggiungibile se e solo se lo è il sistema ottenuto dalla connessione in serie di Σ_A con Σ_P , dimostriamo la raggiungibilità di quest'ultimo sistema. Di fatto, la coprimialità di d_B e d_C assicura che il parallelo Σ_P sia realizzazione minima (e quindi raggiungibile) della sua f.d.t.

$$w_P(z) = \frac{n_B d_C + n_C d_B}{d_B d_C},$$

(ovvero $n_B d_C + n_C d_B$ e $d_B d_C$ sono coprimi). Ma allora, Σ_A e Σ_P sono raggiungibili e n_A e $d_B d_C$ sono coprimi. Ciò assicura che il sistema ottenuto dalla connessione in serie di Σ_A con Σ_P sia raggiungibile e quindi anche Σ lo sia.

Per quanto concerne l'osservabilità, è immediato rendersi conto del fatto che se Σ_{s1} è osservabile allora noti $u = u_A$ e y_B sono in grado di "osservare" gli stati iniziali $x_A(0)$ e $x_B(0)$, come pure di valutare istante per istante $y_A(t) = u_B(t) = u_C(t)$. Ma allora, poichè il sistema Σ_C è osservabile e di esso conosco ingresso u_C e uscita y_C , sono in grado di osservare anche l'ultima componente, $x_C(0)$, dello stato complessivo di Σ . Pertanto Σ è osservabile.