I COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI - TEMA A
17 Aprile 2003

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right) y(t) = \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right) \frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali
$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = -2;$$

ii) si determini, <u>operando nel dominio del tempo</u>, la risposta impulsiva del sistema, $w(t)$;

iii) si determini la risposta (forzata) del sistema in corrispondenza alla sollecitazione in ingresso
$$u(t) = \delta_{-1}\left(t - \frac{2}{\pi}\right).$$

iv) Si tracci il diagramma di Bode della risposta in frequenza del sistema $W(j\omega)$.

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1+2a)\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con a parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo, nel seguito dell'esercizio, $a = 1$,

ii) si determini il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza $W(j\omega)$;

iii) si determini la risposta di regime permanente, se esiste, al segnale di ingresso
$$u(t) = [1 - \cos t]\delta_{-1}(t).$$

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^iy(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{n} b_i \frac{d^iu(t)}{dt^i}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$, si definisca il concetto di stabilità BIBO e se fornisca una caratterizzazione completa, operando prima nel dominio del tempo e poi nel dominio delle trasformate.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^2 + 4s + \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right) = (s+2)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0,$$

ed ha come radici caratteristiche

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm j\frac{\pi}{2}.$$

Pertanto l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate entrambe semplici. I modi elementari associati a tali radici, di molteplicità 1, sono (in forma reale) $e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ e $e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, e quindi l'evoluzione libera d'uscita generica del sistema è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + c_2 e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Nel caso specifico in esame, le condizioni iniziali assegnate si traducono nei seguenti vincoli sui coefficienti c_1 e c_2:

$$\begin{aligned}
1 &= y(0^-) = y_\ell(0^-) = c_1 \qquad \text{e} \\
-2 &= \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell(0^-)}{dt} \\
&= -2c_1 e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - c_1\frac{\pi}{2}e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 2c_2 e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + c_2\frac{\pi}{2}e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big|_{t=0} \\
&= -2c_1 + c_2\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$c_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad c_2 = 0,$$

da cui segue

$$y_\ell(t) = e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

ii) [4 punti] In virtù dell'analisi portata avanti al punto i) e tenuto conto del fatto che il sistema in esame è strettamente proprio (e quindi non compare un impulso di Dirac nella risposta impulsiva), la risposta impulsiva assume la seguente espressione:

$$w(t) = \left[d_1 e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + d_2 e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]\delta_{-1}(t).$$

Per valutare il valore dei coefficienti d_1 e d_2, sfruttiamo la definizione di risposta impulsiva (ovvero di risposta in evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \delta(t)$) e, a tal fine, andiamo a valutare preliminarmente il valore della derivata prima e della derivata seconda di $w(t)$. Sfruttando la proprietà di campionamento dell'impulso, si trova:

$$\begin{aligned}
\frac{dw(t)}{dt} &= d_1\delta(t) + \Big[-2d_1e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - d_1\frac{\pi}{2}e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 2d_2e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\
&+ d_2\frac{\pi}{2}e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big]\delta_{-1}(t) \\
&= d_1\delta(t) + \Big[\left(d_2\frac{\pi}{2} - 2d_1\right)e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \left(d_1\frac{\pi}{2} + 2d_2\right)e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big]\delta_{-1}(t) \\
\frac{d^2w(t)}{dt^2} &= d_1\delta_1(t) + \left(d_2\frac{\pi}{2} - 2d_1\right)\delta(t) + \Big[-2\left(d_2\frac{\pi}{2} - 2d_1\right)e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \\
&- \left(d_2\frac{\pi}{2} - 2d_1\right)\frac{\pi}{2}e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 2\left(d_1\frac{\pi}{2} + 2d_2\right)e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\
&- \left(d_1\frac{\pi}{2} + 2d_2\right)\frac{\pi}{2}e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big]\delta_{-1}(t) \\
&= d_1\delta_1(t) + \left(d_2\frac{\pi}{2} - 2d_1\right)\delta(t) + \\
&+ \Big[-(2d_2\pi - 4d_1 + d_1\left(\frac{\pi}{2}\right)^2)e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \left(d_2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4d_2 - 2d_1\pi\right)\cdot \\
&\cdot\ e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big]\delta_{-1}(t).
\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza a $u(t)$ l'impulso di Dirac e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, si giunge al seguente sistema:

$$\begin{aligned}
&\Big[d_1\delta_1(t) + \left(d_2\frac{\pi}{2} - 2d_1\right)\delta(t) - (2d_2\pi - 4d_1 + d_1\left(\frac{\pi}{2}\right)^2)e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\delta_{-1}(t) - \\
&-\Big(d_2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 4d_2 - 2d_1\pi\Big)e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\delta_{-1}(t)\Big] + \\
&+ 4\left\{d_1\delta(t) + \Big[\left(d_2\frac{\pi}{2} - 2d_1\right)e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \left(d_1\frac{\pi}{2} + 2d_2\right)e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big]\delta_{-1}(t)\right\} \\
&+ \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right)\Big(d_1e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + d_2e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\Big)\delta_{-1}(t) = \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right)\frac{d\delta(t)}{dt} \\
&= \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right)\delta_1(t).
\end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti dei segnali canonici $\delta_{-1}(t), \delta(t)$ e $\delta_1(t)$ ai due membri, si ottiene:

$$d_1 = \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right) \qquad \text{e} \qquad \left(d_2\frac{\pi}{2} - 2d_1\right) + 4d_1 = 0,$$

da cui segue

$$d_1 = \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right) \qquad \text{e} \qquad d_2 = -\frac{16 + \pi^2}{\pi}.$$

Pertanto

$$w(t) = \left[\left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right)e^{-2t}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{16 + \pi^2}{\pi}e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]\delta_{-1}(t).$$

iii) [3 punti] Osserviamo preliminarmente che, in virtù della tempo-invarianza del sistema, se determiniamo la risposta forzata $\bar{y}_f(t)$ al segnale $\bar{u}(t) = \delta_{-1}(t)$, allora l'uscita forzata cercata, $y_f(t)$ sarà esprimibile nella forma $y_f(t) = \bar{y}_f\left(t - \frac{2}{\pi}\right)$. Per determinare $\bar{y}_f(t)$ conviene lavorare nel dominio delle trasformate di Laplace. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{\left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right) s}{s^2 + 4s + \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right)}$$

e poichè la trasformata del gradino $\bar{u}(t)$ è $\bar{U}(s) = 1/s$, la trasformata di Laplace della corrispondente uscita forzata è

$$\bar{Y}_f(s) = \frac{\left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right)}{s^2 + 4s + \left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right)}.$$

Dalla semplice riscrittura di $\bar{Y}_f(s)$ nella forma

$$\bar{Y}_f(s) = \frac{\left(4 + \frac{\pi^2}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{(s+2)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{16 + \pi^2}{2\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{(s+2)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

ne consegue subito

$$\bar{y}_f(t) = \frac{16 + \pi^2}{2\pi} e^{-2t} \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \delta_{-1}(t)$$

e pertanto

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \frac{16 + \pi^2}{2\pi} e^{-2\left(t - \frac{2}{\pi}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(t - \frac{2}{\pi}\right)\right) \delta_{-1}(t - 2/\pi) \\ &= \frac{16 + \pi^2}{2\pi} e^{-2\left(t - \frac{2}{\pi}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2} t - 1\right) \delta_{-1}(t - 2/\pi). \end{aligned}$$

iii) [4 punti] Per la determinazione del diagramma di Bode della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento assegnata, portiamo, preliminarmente, la funzione di trasferimento in forma di Bode. Da

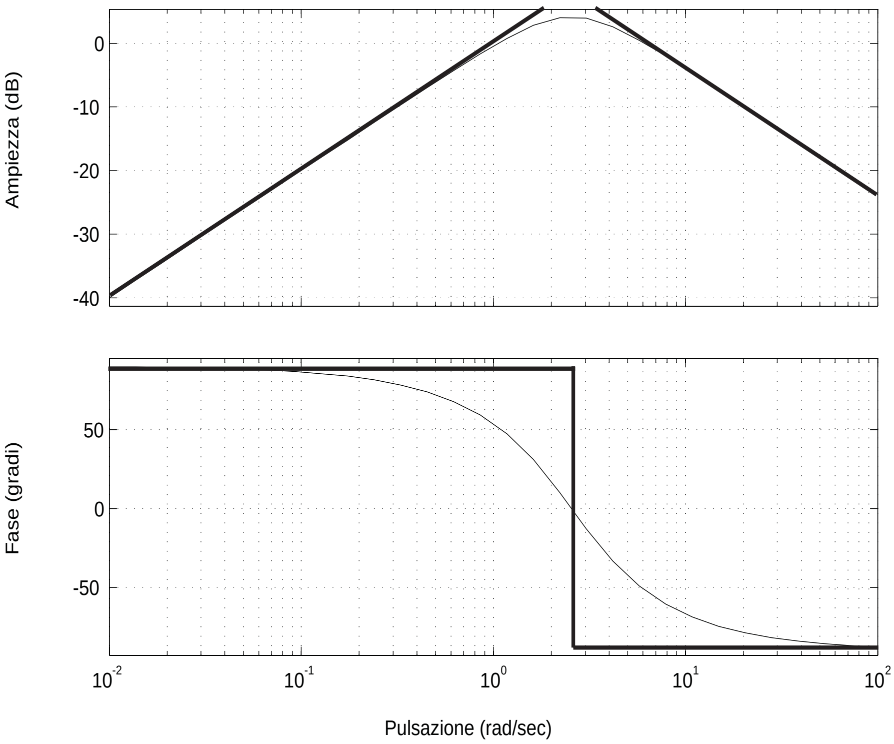
$$W(s) = \frac{s}{1 + \frac{16}{16+\pi^2} s + \frac{s^2}{\left(\sqrt{4+\frac{\pi^2}{4}}\right)^2}}$$

si deduce immediatamente che il guadagno di Bode è

$$K_B = 1.$$

Inoltre, nella funzione di trasferimento compaiono: uno zero semplice nell'origine e un termine trinomio, relativo ad una coppia di poli complessi coniugati, con pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{4 + \frac{\pi^2}{4}}$ e coefficiente di smorzamento $\xi = \frac{4}{\sqrt{16+\pi^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi sono quelli riportati nelle figure sottostanti.



Esercizio 2. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^3 + 3as^2 + (1 + 2a)s + a = 0.$$

Per valutare al variare di a la collocazione delle radici e, specificatamente, se il polinomio in esame è di Hurwitz o meno, possiamo applicare il criterio di Routh. La tabella corrispondente a questo polinomio è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & (1 + 2\,\mathrm{a}) \\
2 & 3\mathrm{a} & \mathrm{a} \\
1 & \dfrac{2a + 6a^2}{3a} & 0 \\
0 & \mathrm{a} & 0
\end{array}$$

È immediato rendersi conto del fatto che la prima colonna della tabella ha tutti gli elementi di ugual segno (positivo) se e solo se $a > 0$. In tal caso il polinomio è di

Hurwitz. In tutti gli altri casi, invece, ha almeno uno zero nel semipiano $\text{Re}(s) \geq 0$. Per quanto concerne la stabilità BIBO, ovviamente per $a > 0$ il sistema, essendo asintoticamente stabile è pure BIBO stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 + s}{s^3 + 3as^2 + (1+2a)s + a} = \frac{s(s+1)}{s^3 + 3as^2 + (1+2a)s + a}.$$

Poichè gli zeri al numeratore sono 0 e -1, è evidente che ci può essere stabilità BIBO senza stabilità asintotica se e solo se esiste un valore del parametro a per cui il polinomio al denominatore nella precedente rappresentazione della funzione di trasferimento ha uno zero in 0 e i rimanenti due zeri nel semipiano $\text{Re}(s) < 0$. Per $a = 0$ il polinomio al denominatore fattorizza nella forma $s(s^2+1)$ e pertanto la funzione di trasferimento, in forma irriducibile, diventa

$$W(s) = \frac{s+1}{s^2+1}.$$

Chiaramente tale funzione di trasferimento ha due poli immaginari coniugati e pertanto il sistema non è BIBO stabile.

ii) [5 punti] Per $a = 1$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s(s+1)}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{s(s+1)}{(s+1)^3} = \frac{s}{(s+1)^2}$$

e quindi la corrispondente risposta in frequenza è

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{(1+j\omega)^2}.$$

Riscriviamo la $W(j\omega)$ evidenziandone parte reale e parte immaginaria. Dopo semplici passaggi si perviene a

$$W(j\omega) = \frac{2\omega^2}{(1+\omega^2)^2} + j\frac{\omega(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}.$$

Pertanto

$$\text{Re}\{W(j\omega)\} = \frac{2\omega^2}{(1+\omega^2)^2} \qquad \text{Im}\{W(j\omega)\} = \frac{\omega(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}.$$

Si ha

$$\text{Re}\{W(j\omega)\} > 0 \qquad \forall\ \omega > 0,$$

mentre

$$\text{Im}\{W(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < \omega < 1; \\ 0 & \text{per } \omega = 1; \\ < 0 & \text{per } \omega > 1. \end{cases}$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\text{Re}\{W(j\omega)\}$ e $\text{Im}\{W(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to 0^+} \text{Re}\{W(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \to 0^+} \text{Im}\{W(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \to +\infty} \text{Re}\{W(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \to +\infty} \text{Im}\{W(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

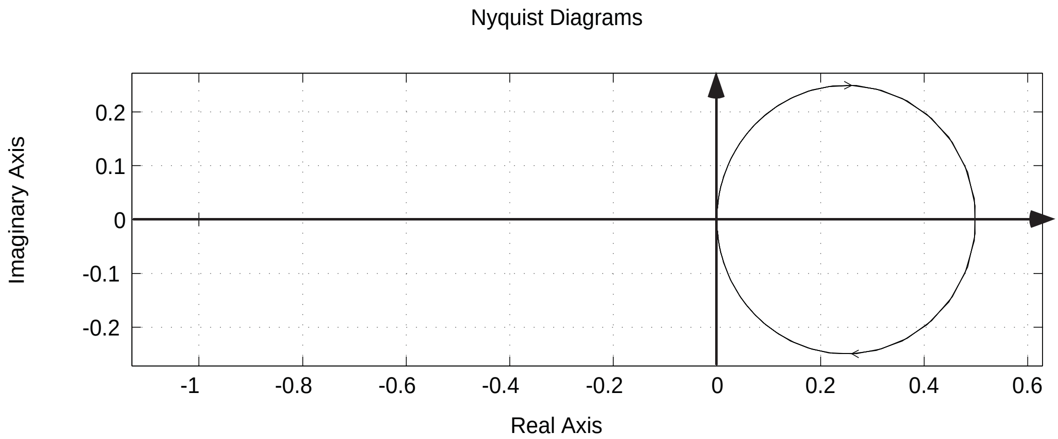
Inoltre per $\omega = 1$ la parte immaginaria si annulla mentre la parte reale vale $\text{Re}\{W(j1)\} = \frac{1}{2}$. Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\arg\{W(j\omega)\} = \arg(j\omega) - 2\arg(1 + j\omega).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0^+} \arg\{W(j\omega)\} &= 90^o \\ \lim_{\omega\to +\infty} \arg\{W(j\omega)\} &= -90^o.\end{aligned}$$

Il diagramma di Nyquist risulta, pertanto, il seguente



iii) [3 punti] Per $a = 1$ il sistema è asintoticamente stabile e quindi pure BIBO stabile. Pertanto ha senso parlare di risposta a regime permanente al segnale di ingresso assegnato $u(t)$ (a partire da arbitrarie condizioni iniziali e quindi, in particolare, a partire da condizioni iniziali nulle). La risposta in frequenza del sistema, come abbiamo già visto, è

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{(1 + j\omega)^2}.$$

Dalla teoria sappiamo che la risposta di regime permanente al segnale di ingresso dato è

$$y_{rp}(t) = \Big[W(0) - |W(j)| \cos(t + \arg(W(j))\Big]\delta_{-1}(t).$$

Pertanto si tratta di valutare, semplicemente, $W(0), |W(j)|$ e $\arg(W(j))$. Si trova, allora,

$$W(0) = 0 \qquad W(j) = \frac{j}{(1 + j)^2},$$

da cui segue

$$|W(j)| = \frac{1}{2} \qquad \arg(W(j)) = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 0.$$

Da ciò segue

$$y_{rp}(t) = -\frac{1}{2} \cos t \ \delta_{-1}(t).$$

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 4 del libro di testo.