II COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI - TEMA B
19 Giugno 2003

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{2-s}{(s+2)(s+6)}.$$

i) Supponendo di applicare un'azione di controllo puramente proporzionale $C(s) = K, K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nella catena di azione diretta, si studi al variare di K la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, facendo uso della famiglia dei diagrammi di Nyquist di $K \cdot G(j\omega)$ (parametrizzata su K).

Supponendo, nel seguito, $K = 4$ e posto

$$W(s) := \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)},$$

ii) si determini l'espressione della risposta al gradino del sistema e se ne determini (almeno approssimativamente) il valore della sovraelongazione.

[SUGGERIMENTI: per determinare la sovraelongazione è necessario determinare preliminarmente la collocazione dei punti di minimo e massimo della risposta al gradino. Si ricordi, inoltre, che la presenza di uno zero instabile può generare fenomeni transitori indesiderati. Si ricorda inoltre che

$$A\sin(\omega t) - B\cos(\omega t) = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t - \phi),$$

dove

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\phi \qquad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\phi.]$$

iii) Si tracci il diagramma di Bode delle ampiezze della risposta in frequenza del sistema e si determini il valore dei soli parametri caratteristici pulsazione di risonanza e picco di risonanza relativo.

[SUGGERIMENTO: si assuma, per semplictà, $\omega_r \approx \omega_n$.]

Esercizio 2. Si consideri il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+0.1s}{1+0.01s}.$$

Si progetti un controllore $C(s)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 1 con errore di regime permanente alla rampa unitaria approssimativamente $e^*_{rp} = 0.01$;

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega^*_A = 500$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

Esercizio 3. Consideriamo il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - 2y(t-1) + (2a - a^2)y(t-2) = u(t) - 4u(t-2), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

i) Determinare l'espressione dei modi del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) Per $a = 0$ determinare l'espressione della risposta impulsiva del sistema.

Teoria. Si enunci e commenti il criterio di Michailov. [FACOLTATIVO: si dimostri il criterio di Michailov].

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [6 punti] Per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist andiamo a valutare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento in catena aperta

$$KG(s) = K\,\frac{2-s}{(s+2)(s+6)} = K\,\frac{2-s}{s^2+8s+12}$$

per valori di K positivi e negativi. Da

$$KG(j\omega) = K\,\frac{2-j\omega}{12-\omega^2+j8\omega} = \frac{K(24-10\omega^2)+jK\omega(\omega^2-28)}{(12-\omega^2)^2+64\omega^2}$$

segue

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \frac{K(24-10\omega^2)}{(12-\omega^2)^2+64\omega^2} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{K\omega(\omega^2-28)}{(12-\omega^2)^2+64\omega^2}.$$

Pertanto, posto $\bar{\omega}_1 := \sqrt{12/5}$ e $\bar{\omega}_2 := \sqrt{28}$, si ha per $K>0$ e $\omega \geq 0$:

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} >0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ <0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} <0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ >0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2. \end{cases}$$

Invece, per $K<0$, si ha

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} <0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ >0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} >0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ <0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_1$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = -\frac{K\sqrt{15}}{24} = \begin{cases} <0 & \text{se } K>0; \\ >0 & \text{se } K<0. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_2$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = -\frac{K}{8} = \begin{cases} <0 & \text{se } K>0; \\ >0 & \text{se } K<0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = 0.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\}$ e $\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= \frac{K}{6} \\ \lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0^- \\ \lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= 0^- \\ \lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0^+. \end{aligned}$$

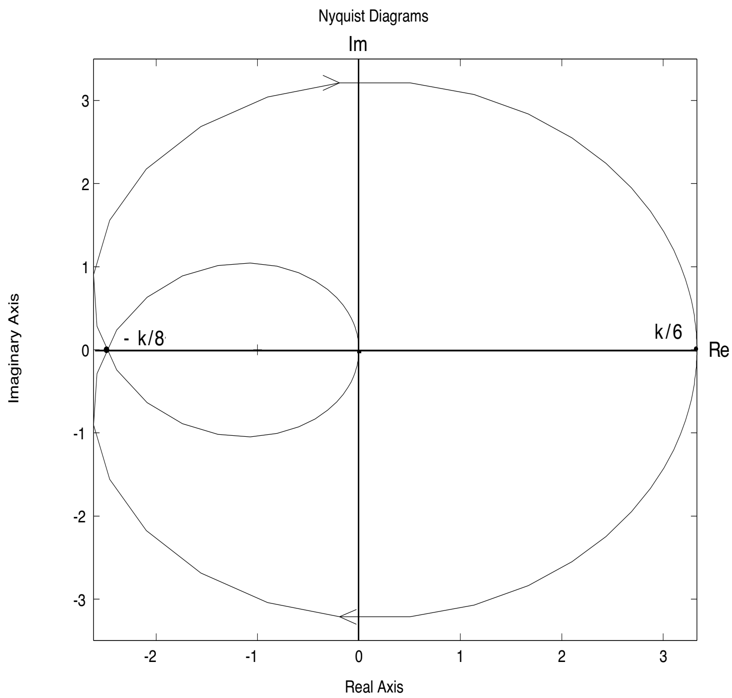
Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\begin{aligned}\arg KG(j\omega) &= \arg\left(\frac{K}{6}\ \frac{1-j0.5\omega}{(1+j0.5\omega)(1+j\frac{1}{6}\omega)}\right)\\ &= \arg\left(\frac{K}{6}\cdot(1-j0.5\omega)\right)-\arg\left((1+j0.5\omega)(1+j\frac{1}{6}\omega)\right).\end{aligned}$$

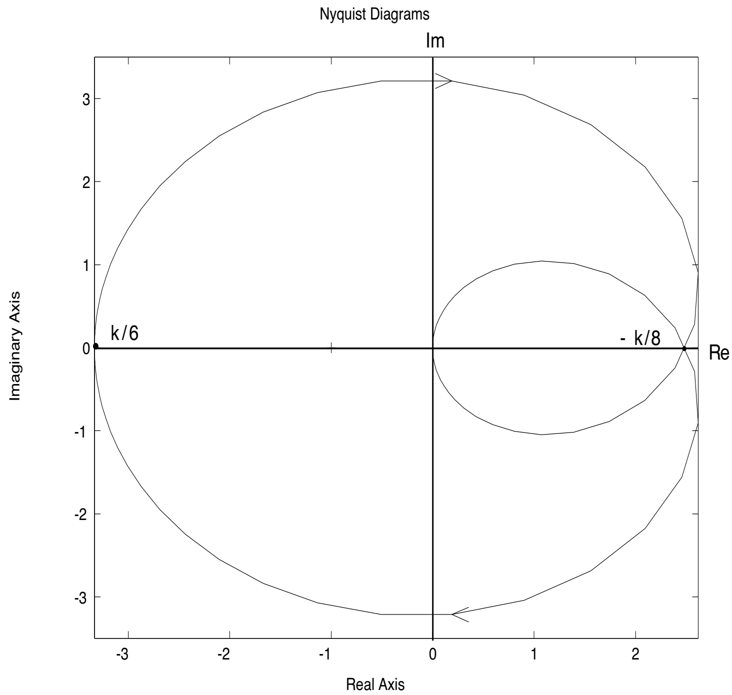
Pertanto

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0^+}\arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases}0^o & \text{se } K>0;\\ 180^o & \text{se } K<0;\end{cases}\\ \lim_{\omega\to +\infty}\arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases}-90^o & \text{se } K>0;\\ 90^o & \text{se } K<0.\end{cases}\end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che il comportamento per $\omega < 0$ si trova per simmetria, rovesciando la porzione di diagramma relativa a pulsazione non negative, il diagramma di Nyquist di $KG(j\omega)$ risulta, pertanto, illustrato per $K > 0$ in Figura 1



e per $K < 0$ in Figura 2.



Risulta allora evidente, dal primo diagramma, che

- per $-1 < -K/8$ (ovvero $K < 8$), e chiaramente $K > 0$, $N = 0$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile;
- per $-1 > -K/8$ (ovvero $K > 8$), $N = -2$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato è instabile;
- per $-1 = -K/8$ (ovvero $K = 8$), si ha passaggio per il punto critico $-1 + j0$. Ciò ci permette di dire che $W(s)$ ha due poli a parte reale nulla (complessi coniugati) e pertanto il sistema retroazionato è instabile. Se adottiamo un percorso di Nyquist modificato, in modo da evitare il punto $-1 + j0$, ci rendiamo conto che $N = 0$ e quindi $W(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.

Nel caso del secondo diagramma, invece, è evidente che

- per $-1 < K/6$ (ovvero $K > -6$), e chiaramente $K < 0$, $N = 0$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile;
- per $-1 > K/6$ (ovvero $K < -6$), $N = -1$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato è instabile;
- per $-1 = K/6$ (ovvero $K = 6$), si ha passaggio per il punto critico $-1 + j0$. Ciò ci permette di dire che $W(s)$ ha un polo a parte reale nulla (precisamente in 0) e pertanto il sistema retroazionato è instabile. Se adottiamo un percorso di Nyquist modificato, in modo da evitare il punto $-1 + j0$, ci rendiamo conto che $N = 0$ e quindi $W(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.

ii) [5 punti] Per $K = 4$ la funzione di trasferimento del sistema retroazionato è

$$W(s) = \frac{4(2-s)}{(s+2)(s+6)+4(2-s)} = \frac{4(2-s)}{s^2+4s+20}$$

e presenta due poli complessi coniugati in

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-80}}{2} = -2 \pm j4,$$

e uno zero instabile in 2. La trasformata di Laplace del gradino è $U(s) = 1/s$. Pertanto la trasformata di Laplace della risposta al gradino è:

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{4(2-s)}{s(s^2+4s+20)}.$$

Ricorrendo allo sviluppo in fratti semplici otteniamo

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= \frac{0.4}{s} + \frac{-0.4s-5.6}{s^2+4s+20} = \frac{0.4}{s} - 0.4\,\frac{s+14}{(s+2)^2+4^2} \\ &= \frac{0.4}{s} - \frac{4}{10}\frac{(s+2)+12}{(s+2)^2+4^2} = \frac{0.4}{s} - \frac{4}{10}\frac{(s+2)}{(s+2)^2+4^2} - \frac{12}{10}\frac{4}{(s+2)^2+4^2} \end{aligned}$$

e, antitrasformando, si ottiene

$$y_f(t) = \Big(0.4 - 0.4e^{-2t}\cos(4t) - 1.2e^{-2t}\sin(4t)\Big)\,\delta_{-1}(t).$$

Notiamo che

$$y_f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} y_f(t) = 0.4.$$

La derivata della risposta al gradino, per $t > 0$, è:

$$\begin{aligned} \frac{dy_f(t)}{dt} &= 0.8e^{-2t}\cos(4t) + 1.6e^{-2t}\sin(4t) + 2.4e^{-2t}\sin(4t) - 4.8e^{-2t}\cos(4t) \\ &= 4e^{-2t}(\sin(4t)-\cos(4t)) = 4\sqrt{2}e^{-2t}\sin\left(4t-\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

La derivata si annulla in corrispondenza a tutti e soli i punti del tipo

$$4t - \frac{\pi}{4} = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$t = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Potremmo essere tentati di dire subito che il valore massimo della $y_f(t)$ si ottiene per $t_1 = \frac{\pi}{16}$. Tuttavia ciò non è scontato, dal momento che la presenza di uno zero instabile può portare ad un undershoot. Si trova, infatti,

$$\begin{aligned} y_f(t_1) &= 0.4 - 0.4\,e^{-\pi/8}\cos(\pi/4) - 1.2\,e^{-\pi/8}\sin(\pi/4) \\ &= 0.4 - \frac{1.6\,e^{-\pi/8}}{\sqrt{2}} \approx -0.36. \end{aligned}$$

Per $t_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{16}$ si trova, invece,

$$\begin{aligned} y_f(t_2) &= 0.4 - 0.4\ e^{-5\pi/8}\cos(5\pi/4) - 1.2\ e^{-5\pi/8}\sin(5\pi/4) \\ &= 0.4 + \frac{1.6\ e^{-5\pi/8}}{\sqrt{2}} \approx 0.5588. \end{aligned}$$

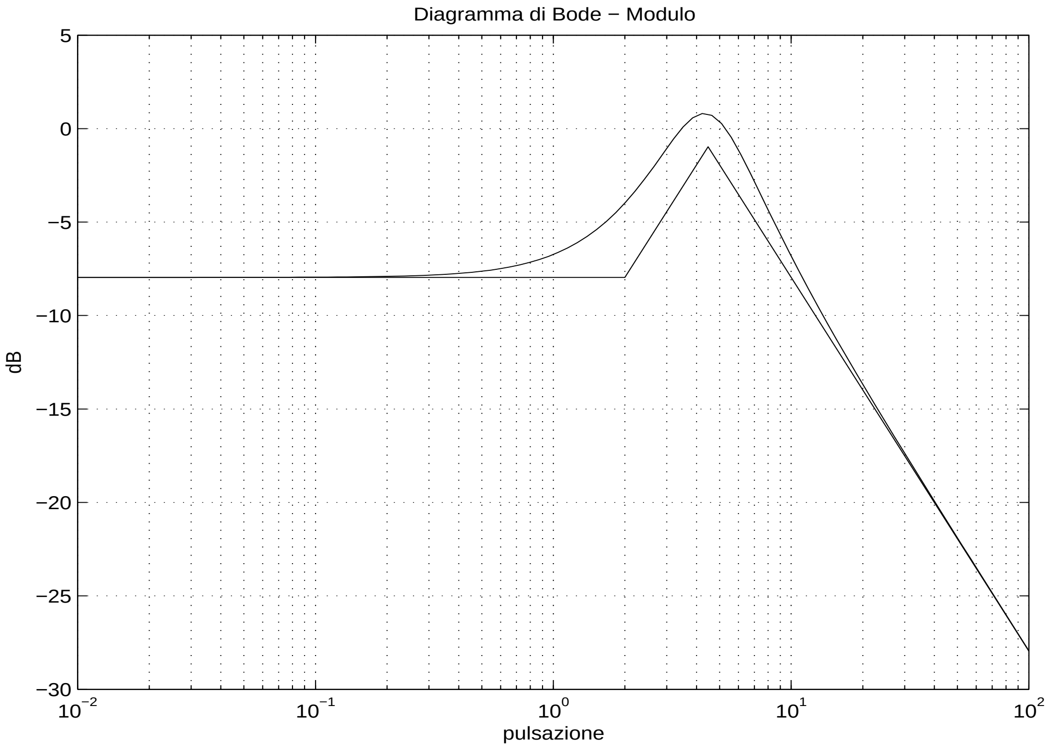
Pertanto

$$s = \frac{0.1588}{0.4} \cdot 100\% = 39.70\%.$$

iii) [3 punti] Lo studio del diagramma di Bode delle ampiezze della risposta in frequenza del sistema

$$W(j\omega) = \frac{4(2-j\omega)}{-\omega^2 + 4j\omega + 20} = 0.4\ \frac{1 - j0.5\omega}{1 + j\frac{2\cdot 2}{\sqrt{20}}\frac{\omega}{\sqrt{20}} - \frac{\omega^2}{20}}$$

fornisce



La risposta in frequenza presenta una pulsazione di risonanza molto prossima a $\omega_n = \sqrt{20}$ (si noti che $\xi = 2/\sqrt{20} = 1/\sqrt{5} < 1/\sqrt{2}$ per cui il termine trinomio da solo presenta picco già di per sè) e un picco di risonanza relativo che possiamo assumere

$$M_{\text{rel}} = \left|\frac{W(j\omega_n)}{W(0)}\right|_{\text{dB}} = 20\log\left|\frac{1 - j0.5\sqrt{20}}{1 + j\frac{4}{\sqrt{20}} - 1}\right| = 20\log\left|\frac{1 - j\sqrt{5}}{1 + j\frac{2}{\sqrt{5}} - 1}\right| \approx 8.75\ \text{dB}.$$

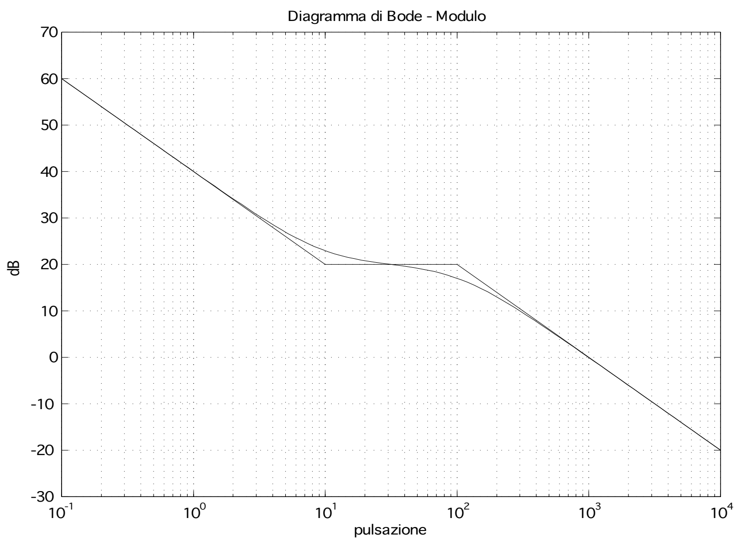
Esercizio 2. [7 punti] Poichè viene richiesto che il tipo del sistema sia 1 è sufficiente introdurre un polo semplice nell'origine attraverso il controllore. Provvediamo, ora, ad attribuire al guadagno di Bode del controllore un valore che assicuri il rispetto del vincolo sull'errore di regime permanente. Poichè è noto che l'errore di regime permanente di un sistema di tipo 1 è espresso dalla formula

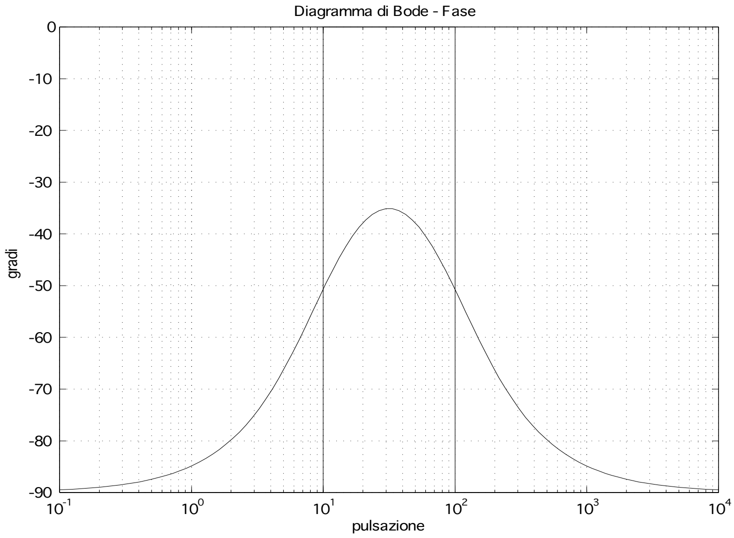
$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)K_B(G)},$$

dove $K_B(C)$ e $K_B(G)$ rappresentano, rispettivamente, il guadagno di Bode del controllore e del processo, il vincolo su $K_B(C)$ diventa

$$\frac{1}{K_B(C)K_B(G)} = \frac{1}{K_B(C)} \leq 0.01.$$

Da ciò segue $K_B(C) \geq 100$. Scegliamo allora, preliminarmente, $C'(s) = \frac{K_B(C)}{s} = \frac{100}{s}$ e andiamo a valutare pulsazione di attraversamento e margine di fase per la funzione di trasferimento in catena aperta $C'(s)G(s) = 100\ \frac{1+0.1s}{s(1+0.01s)}$. Graficamente si trova





ed è immediato rendersi conto del fatto che la pulsazione ω_A si trova esattamente in corrispondenza a 10^3 rad/s, mentre il margine di fase in corrispondenza alla pulsazione $\omega_A^* = 500$ rad/sec è superiore a 90^o. Per compensare il fatto che $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) > m_\psi^* := 45^o$ potremmo utilizzare un'azione attenuatrice:

$$C_{\text{att}}(s) = \frac{1 + s\alpha T}{1 + sT}.$$

In corrispondenza a $\omega_A^* = 500$ rad/s si ha

$$|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|_{\text{dB}} = 20 \log \left| 100 \; \frac{\sqrt{1 + 50^2}}{500\sqrt{1 + 25}} \right| \approx 6.02 \text{ dB}.$$

Dai diagrammi universali delle reti attenuatrici si rileva che scegliendo, ad esempio, $\alpha = 0.5$ e $u = \omega_A^* T = 50$, l'attenuazione è con buona approssimazione quella desiderata mentre il ritardo di fase introdotto è minimo e permette quindi di mantenere un margine di fase decisamente superiore a 45^o. Il compensatore complessivo risulta, pertanto,

$$C(s) = \frac{K_B(C)}{s} C_{\text{att}}(s) = 100 \; \frac{1 + 0.05s}{s(1 + 0.1s)}.$$

Esercizio 3. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è:

$$z^2 - 2z + a(2 - a) = (z - a)(z - 2 + a) = 0,$$

e quindi ha due zeri, collocati rispettivamente in $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = 2 - a$. Distinguiamo i seguenti casi:

- $a = 0$;
- $a = 2$;

- $a = 1$;
- $a \neq 0, 1, 2$.

Se $a = 0$ gli zeri dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ pertanto i modi del sistema sono

$$\delta(t+2) \qquad 2^t.$$

Se $a = 2$ gli zeri dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$ pertanto ricadiamo nel caso precedente. Se $a = 1$ gli zeri dell'equazione caratteristica coincidono e valgono entrambi $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ pertanto i modi del sistema sono

$$1^t \qquad t\ 1^t.$$

Se $a \neq 0, 1, 2$ gli zeri dell'equazione caratteristica sono entrambi diversi da 0 e distinti tra loro, pertanto i modi del sistema sono

$$\lambda_1^t \qquad \lambda_2^t.$$

ii) [3 punti] Per $a = 0$, il sistema presenta i modi

$$\delta(t+2) \qquad 2^t,$$

e l'equazione caratteristica diventa

$$y(t) - 2y(t-1) = u(t) - 4u(t-2), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

Pertanto $n = 2$, $m = 0$, e la risposta impulsiva è esprimibile nella forma

$$w(t) = d_0\delta(t) + d_1\delta(t-1) + d_2\delta(t-2) + d_3 2^t \delta_{-1}(t-3).$$

Da una semplice riscrittura dell'equazione alle differenze del sistema in cui si sostituisca a $u(t)$ l'impulso $\delta(t)$ e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, segue immediatamente che

$$w(t) - 2w(t-1) = \delta(t) - 4\delta(t-2).$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} w(0) &= 1 \\ w(1) &= 2 \\ w(2) &= 4 - 4 = 0 \\ w(3) &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$d_0 = 1, \qquad d_1 = 2, \qquad d_2 = d_3 = 0.$$

In altri termini,

$$w(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1).$$

Teoria. [3+2 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, paragrafo 7.5 oppure appunti delle lezioni.