COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
10 Settembre 2003

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a\frac{d^4y(t)}{dt^4} + (2a+1)\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (2+a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - au(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 1$,

ii) si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t)$:

iii) si determini la risposta forzata del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta(t) - e^{-t}\sin t\ \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1-s}{s(s+7)}.$$

i) Supponendo di applicare un'azione di controllo puramente proporzionale $C(s) = K, K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nella catena di azione diretta, si studi al variare di K la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, facendo uso della famiglia dei diagrammi di Nyquist di $K \cdot G(j\omega)$ (parametrizzata su K).

Supponendo, nel seguito, $K = 5$ e posto

$$W(s) := \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s)},$$

ii) si determini l'espressione della risposta al gradino del sistema e se ne determini (almeno approssimativamente) il valore della sovraelongazione.

iii) Si tracci il diagramma di Bode delle ampiezze della risposta in frequenza del sistema e si determini il valore dei soli parametri caratteristici pulsazione di risonanza e picco di risonanza relativo.

[SUGGERIMENTO: si assuma, per semplictà, $\omega_r \approx \omega_n$.]

Esercizio 3. Dato il modello ingresso/uscita a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s - 0.1}{(s^2 + 0.2s + 1)(s+1)},$$

i) si determinino i diagramma di Bode (asintotico e reale) di modulo e fase della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini, se esiste, (almeno in maniera approssimativa) la risposta di regime permanente del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = [\sin(10t) + 10]\delta_{-1}(t).$$

Teoria. Dato un sistema ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da una funzione razionale propria $G(s)$, si definiscano - sotto opportune ipotesi - i concetti di pulsazione di attraversamento e margine di fase, con riferimento sia al diagramma di Bode che al diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$, e li si commenti adeguatamente. Si giustifichi l'utilizzo - di nuovo, sotto opportune ipotesi - del margine di fase di $G(j\omega)$ come buona approssimazione del picco di risonanza della corrispondente

$$W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = as^4 + (2a+1)s^3 + (2+a)s^2 + s =: d(s).$$

È immediato, allora, rendersi conto del fatto che tale equazione ha sempre una radice in 0 e quindi per ogni valore di a il sistema non potrà essere asintoticamente stabile.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, prendiamo in esame la funzione di trasferimento del sistema:

$$W(s) = \frac{n(s)}{d(s)},$$

con $n(s) := s^2 - a$. Poichè per tutti i valori del parametro a non c'è stabilità asintotica, in virtù della presenza di uno zero nell'origine, si tratta di vedere se esistono valori del parametro a in corrispondenza a cui il polinomio $n(s)$ cancella sia lo zero nell'origine che tutti gli eventuali zeri "instabili" di $d(s)$. Affinché $n(0) = 0$ occorre e basta che $a = 0$. Per tale valore di a il polinomio $d(s)$ diventa

$$d(s) = s^3 + 2s^2 + s = s(s+1)^2$$

e pertanto

$$W(s) = \frac{s^2}{s(s+1)^2} = \frac{s}{(s+1)^2}$$

assicurando, così la BIBO stabilità del sistema. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $a = 0$.

ii) [2 punti] Per $a = 1$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s} = \frac{(s+1)(s-1)}{s(s+1)^3} = \frac{s-1}{s(s+1)^2}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $W(s)$ porta a

$$W(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$w(t) = [-1 + (1+2t)e^{-t}]\ \delta_{-1}(t).$$

iii) [3 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso $u(t) = \delta(t) - e^{-t}\sin t\delta_{-1}(t)$ è

$$U(s) = 1 - \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2 + 1}.$$

La trasformata di Laplace della corrispondente evoluzione forzata è data da

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s-1}{s(s+1)^2}\ \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2 + 1} = \frac{s-1}{s[(s+1)^2 + 1]}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$Y_f(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s+4}{(s+1)^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$y_f(t) = \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin t\right]\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. i) [5 punti] Per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist andiamo a valutare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento in catena aperta

$$KG(s) = K\ \frac{1-s}{s(s+7)}$$

per valori di K positivi e negativi. Da

$$KG(j\omega) = K\ \frac{1-j\omega}{j\omega(7+j\omega)} = \frac{K(-8\omega) + jK(\omega^2-7)}{\omega(49+\omega^2)}$$

segue

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \frac{-8K}{49+\omega^2} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{K(\omega^2-7)}{\omega(49+\omega^2)}.$$

Pertanto, posto $\bar{\omega} := \sqrt{7}$, si ha per $K > 0$ e $\omega \geq 0$:

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} < 0, \qquad \text{per ogni } \omega \geq 0$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}. \end{cases}$$

Invece, per $K < 0$, si ha

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} > 0, \qquad \text{per ogni } \omega \geq 0$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = -\frac{K}{7} = \begin{cases} < 0 & \text{se } K > 0; \\ > 0 & \text{se } K < 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = 0.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\}$ e $\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= -\frac{8K}{49} \\ \lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= -\mathrm{sgn}(K)\cdot\infty \\ \lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= 0^{-\mathrm{sgn}(K)} \\ \lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0^{\mathrm{sgn}(K)}. \end{aligned}$$

Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\begin{aligned}\arg KG(j\omega) &= \arg\left(\frac{K}{7}\,\frac{1-j\omega}{j\omega\,(1+j\frac{\omega}{7})}\right)\\ &= \arg\left(\frac{K}{7}\cdot(1-j\omega)\right)-\arg\left(j\omega\left(1+j\frac{\omega}{7}\right)\right).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to 0^+}\arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases}-90^o & \text{se } K>0;\\ 90^o & \text{se } K<0;\end{cases}\\ \lim_{\omega\to +\infty}\arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases}90^o & \text{se } K>0;\\ -90^o & \text{se } K<0.\end{cases}\end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che il comportamento per $\omega < 0$ si trova per simmetria, rovesciando la porzione di diagramma relativa a pulsazione non negative, il diagramma di Nyquist di $KG(j\omega)$ risulta, pertanto, illustrato per $K > 0$ in Figura 1 e per $K < 0$ in Figura 2 (si vedano diagrammi alla fine).

Riportando i diagrammi al finito, attraverso un opportuno diagramma di Nyquist modificato che lascia l'origine alla sinistra del percorso (giro antiorario di 180^o) e corrisponde pertanto ad un giro in verso orario (di 180^o) nel diagramma di Nyquist, possiamo applicare il criterio di Nyquist. Risulta evidente, dal primo diagramma, che

- per $-1 < -K/7$ (ovvero $K < 7$), e chiaramente $K > 0$, $N = 0$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile;
- per $-1 > -K/7$ (ovvero $K > 7$), $N = -2$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato è instabile;
- per $-1 = -K/7$ (ovvero $K = 7$), si ha passaggio per il punto critico $-1 + j0$. Ciò ci permette di dire che $W(s)$ ha due poli a parte reale nulla (complessi coniugati) e pertanto il sistema retroazionato è instabile. Se adottiamo un percorso di Nyquist modificato, in modo da evitare il punto $-1 + j0$, ci rendiamo conto che $N = 0$ e quindi $W(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.

Nel caso del secondo diagramma, invece, è evidente che per ogni valore di $K < 0$ il diagramma di Nyquist compie un giro in verso orario attorno al punto $-1 + j0$, ovvero $N = -1$. Essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 1$ e, pertanto, il sistema retroazionato è sempre instabile.

ii) [4 punti] Per $K = 5$ la funzione di trasferimento del sistema retroazionato è

$$W(s) = \frac{5(1-s)}{s(s+7)+5(1-s)} = \frac{5(1-s)}{s^2+2s+5}$$

e presenta due poli complessi coniugati in

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm j2,$$

e uno zero instabile in 1. La trasformata di Laplace del gradino è $U(s) = 1/s$. Pertanto la trasformata di Laplace della risposta al gradino è:

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{5(1-s)}{s(s^2+2s+5)}.$$

Ricorrendo allo sviluppo in fratti semplici otteniamo

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s+7}{s^2+2s+5} = \frac{1}{s} - \frac{(s+1)+6}{(s+1)^2+2^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} - 3\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \end{aligned}$$

e, antitrasformando, si ottiene

$$y_f(t) = \Big(1 - e^{-t}\cos(2t) - 3e^{-t}\sin(2t)\Big)\,\delta_{-1}(t).$$

Notiamo che

$$y_f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} y_f(t) = 1.$$

La derivata della risposta al gradino, per $t > 0$, è:

$$\begin{aligned} \frac{dy_f(t)}{dt} &= e^{-t}\cos(2t) + 2e^{-t}\sin(2t) + 3e^{-t}\sin(2t) - 6e^{-t}\cos(2t) \\ &= 5e^{-t}(\sin(2t) - \cos(2t)) = 5\sqrt{2}e^{-t}\sin(2t - \pi/4). \end{aligned}$$

La derivata si annulla in corrispondenza a tutti e soli i punti del tipo

$$2t - \frac{\pi}{4} = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

ovvero

$$t = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Potremmo essere tentati di dire che il valore massimo della $y_f(t)$ si ottiene per $t_1 = \frac{\pi}{8}$. Si trova, tuttavia,

$$y_f(t_1) = 1 - \ e^{-\pi/8}\cos(\pi/4) - 3\ e^{-\pi/8}\sin(\pi/4) = 1 - 4\ \frac{e^{-\pi/8}}{\sqrt{2}} = -0.9.$$

Ciò non è stupefacente, dal momento che la presenza di uno zero instabile può portare ad un undershoot. Per $t_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$ si trova

$$y_f(t_2) = 1 - 1\ e^{-5\pi/8}\cos(5\pi/4) - 3\ e^{-5\pi/8}\sin(5\pi/4) = 1 + 4\ \frac{e^{-5\pi/8}}{\sqrt{2}} \approx 1.4.$$

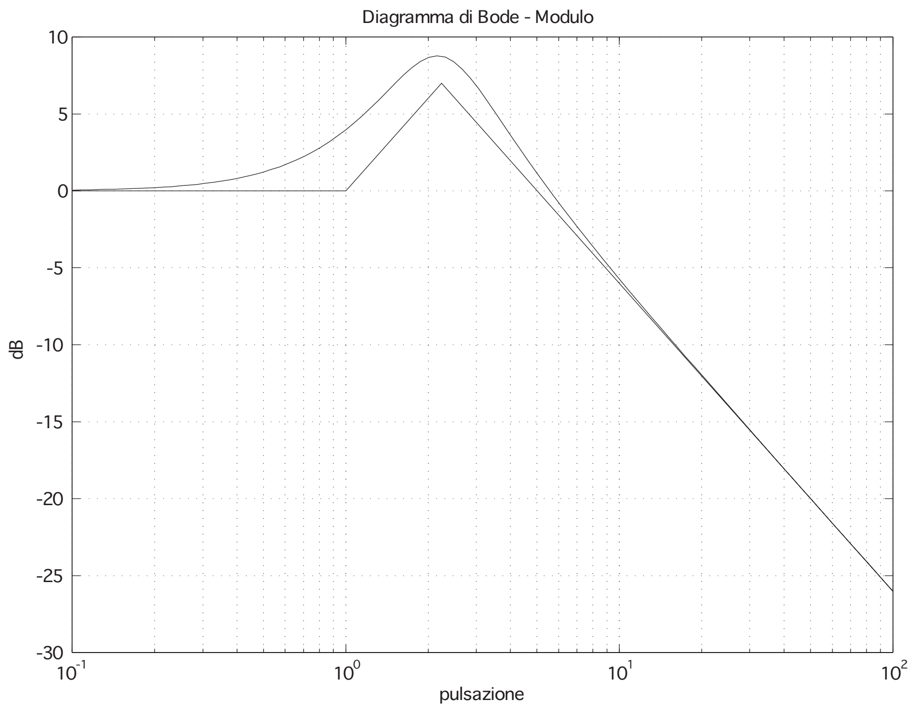
Pertanto si trova

$$s = \frac{1.4-1}{1}\cdot 100\% = 40\%.$$

iii) [2 punti] Lo studio del diagramma di Bode delle ampiezze della risposta in frequenza del sistema

$$W(j\omega) = \frac{5(1 - j\omega)}{-\omega^2 + 2j\omega + 5} = \frac{1 - j\omega}{1 + j\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\omega}{\sqrt{5}} - \frac{\omega^2}{5}}$$

fornisce



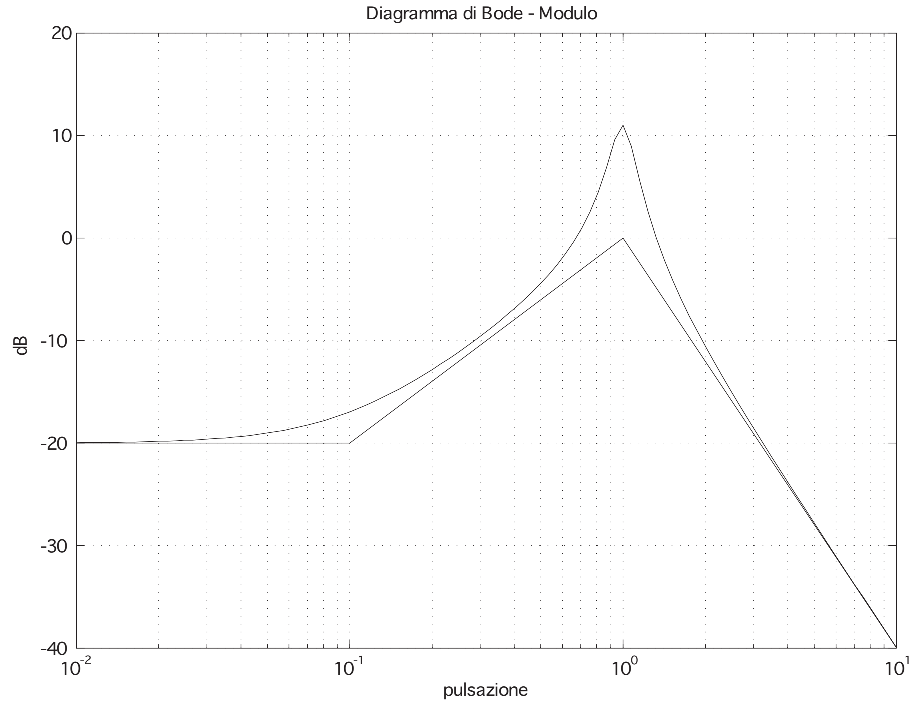
La risposta in frequenza presenta una pulsazione di risonanza molto prossima a $\omega_n = \sqrt{5}$ e un picco di risonanza relativo che possiamo assumere

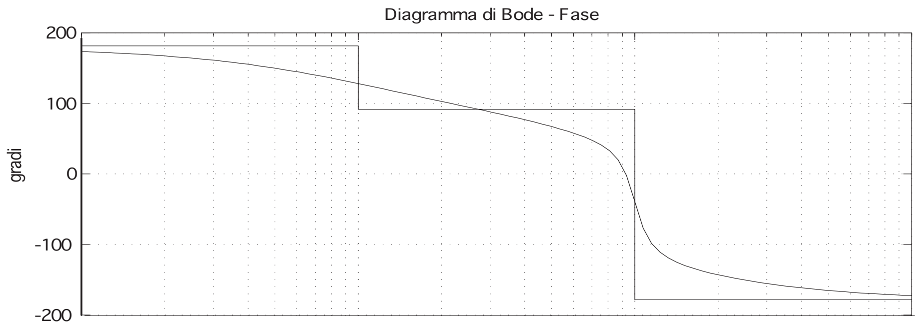
$$M_{\text{rel}} = \left|\frac{W(j\omega_n)}{W(0)}\right|_{\text{dB}} = 20\log\left|\frac{1 - j\sqrt{5}}{1 + j\frac{2}{\sqrt{5}} - 1}\right| \approx 8.75 \text{ dB}.$$

Esercizio 3. i) [3 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$W(s) = -0.1\frac{(1 - 10s)}{(1 + 0.2s + s^2)(1 + s)}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento ha guadagno di Bode -0.1 (ovvero $|K_B|_{\text{dB}} = -20$ dB e $\arg(K_B) = 180^o$). I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi presentano inoltre due punti di spezzamento: uno corrispondente ad uno zero reale positivo in 0.1 ed uno corrispondente sia ad una coppia di poli complessi coniugati, collocati in $-0.1 \pm j\sqrt{0.99}$ (ovvero un termine trinomio con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ rad/sec e coefficiente di smorzamento $\xi = 0.1$), sia ad un polo reale negativo in -1. Il risultato è illustrato in figura.





ii) [2 punti] È immediato rendersi conto del fatto che il sistema è BIBO stabile e quindi esiste la risposta di regime permanente all'ingresso dato, a partire da condizioni iniziali nulle. È inoltre facile rendersi conto del fatto che la pulsazione $\omega = 10$ del segnale sinusoidale di ingresso si trova in una zona del diagramma di Bode alla destra dell'ultima pulsazione di taglio e pertanto sia ampiezza che fase sono assestati, con buona approssimazione, su andamenti fissati (e coincidenti con quelli asintotici). Dal diagramma di Bode possiamo verificare con buona approssimazione che

$$|W(j10)| = 10^{-2} \ (-40 \text{ dB}) \quad \arg W(j10) = -180^o = -\pi.$$

Per quanto concerne l'ingresso costante, invece, si tratta di valutare semplicemente

$W(0) = -0.1$. Pertanto la risposta di regime permanente in corrispondenza al segnale

$$u(t) = [\sin(10t) + 10]\,\delta_{-1}(t)$$

è

$$y_{rp}(t) = [0.01\sin(10t - \pi) - 1]\,\delta_{-1}(t) = [-0.01\sin(10t) - 1]\,\delta_{-1}(t).$$

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 8 del libro di testo.