

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

24 Settembre 2003

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 10\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 100u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

- i) Si determini l'evoluzione libera del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = -1, \quad \frac{dy(0^-)}{dt} = 11, \quad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = -100.$$

- ii) Si determini (in termini approssimativi) la risposta impulsiva del sistema, $g(t)$.
- iii) Si tracci il diagramma di Bode della risposta in frequenza del sistema $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$.
- iv) Si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$ di tipo PD, e quindi con la seguente struttura

$$C(s) = K_p + K_d s,$$

in modo tale che a) il risultante sistema retroazionato risponda al gradino unitario in ingresso con errore di regime permanente non superiore a $e_{rp}^* = 10^{-3}$, b) la pulsazione di attraversamento del sistema in catena aperta sia all'incirca $\omega_A^* = 100$ rad/sec e c) il margine di fase (del sistema in catena aperta) sia almeno pari a 45° .

Esercizio 2. Consideriamo il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$ay(t) + (1 - a)y(t - 1) - y(t - 2) = au(t) - u(t - 1), \quad t \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si determini per quali valori di a il sistema risulta essere causale;
- ii) si studi, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la stabilità asintotica/instabilità del sistema. Determinare l'espressione dei modi del sistema al variare di a in \mathbb{R} ;
- iii) si determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$, la risposta impulsiva del sistema.

Esercizio 3. Si tracci il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza del sistema di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s(s + 1)}{s^2 + 1}.$$

Teoria. Dato un sistema lineare e tempo invariante a tempo continuo di funzione di trasferimento propria $W(s)$, si definiscano i concetti di “tipo” e relativo “errore di regime permanente” del sistema. Supponendo, poi, che $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$, si dimostri che il tipo del sistema retroazionato $W(s)$ coincide con la molteplicità del polo nell’origine della funzione di trasferimento $G(s)$.

[Suggerimento: si supponga nota la caratterizzazione del tipo del sistema $W(s)$ in termini di $W(0)$, $dW(0)/ds$, ...].

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 10s^2 + s + 10 = s^2(s + 10) + (s + 10) = (s^2 + 1)(s + 10),$$

ed ha tre radici semplici $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = j, \lambda_3 = -j$ a cui corrispondono i tre modi (reali)

$$e^{-10t}, \cos t, \sin t.$$

L'evoluzione libera assume, dunque, la seguente espressione generica:

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Particolarizzando la precedente espressione alle specifiche condizioni iniziali assegnate si trova

$$\begin{aligned} -1 &= y(0^-) = y_\ell(0^-) = c_1 + c_2 \\ 11 &= \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell(0^-)}{dt} = -10c_1 + c_3 \\ -100 &= \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = \frac{d^2y_\ell(0^-)}{dt^2} = 100c_1 - c_2. \end{aligned}$$

Si trova, facilmente, $c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = 1$, a cui corrisponde

$$y_\ell(t) = -e^{-10t} + \sin t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

ii) [3 punti] Dall'equazione differenziale che descrive la dinamica del sistema è immediato derivare l'espressione della funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{s + 100}{(s + 10)(s^2 + 1)}.$$

Dalla decomposizione di $G(s)$ nella forma

$$G(s) \approx 0.9 \frac{1}{s + 10} + \frac{-0.9s + 10}{s^2 + 1}$$

segue immediatamente

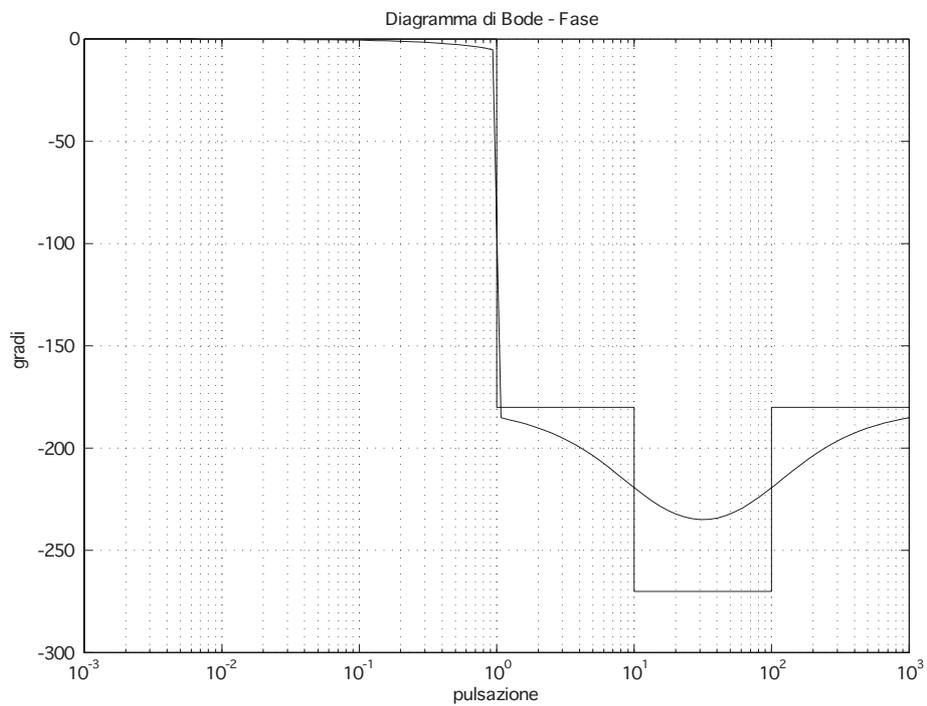
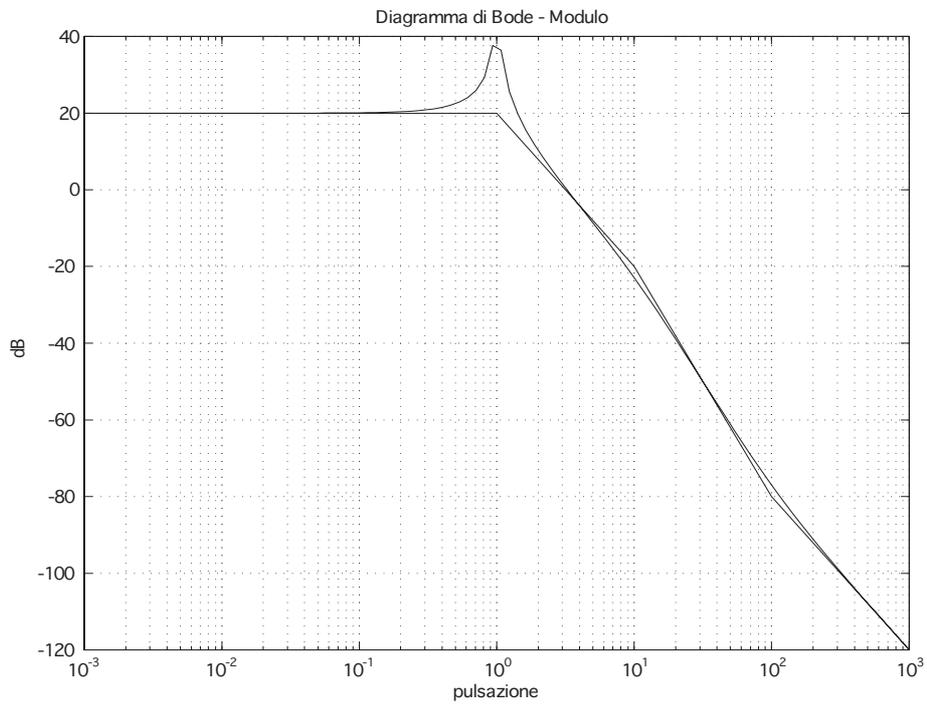
$$g(t) \approx [0.9e^{-10t} - 0.9 \cos t + 10 \sin t] \delta_{-1}(t).$$

iii) [4 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode;

$$W(s) = 10 \frac{1 + \frac{s}{100}}{(1 + \frac{s}{10})(1 + s^2)}.$$

Essa presenta guadagno di Bode di 10 (20 dB), uno zero reale negativo semplice con pulsazione di taglio pari a 100 rad/s, un polo reale negativo semplice con pulsazione di

taglio 10 rad/s e, infine, una coppia di poli immaginari coniugati di pulsazione $\omega_n = 1$. Il risultato è illustrato in figura



iv) [5 punti] Il sistema è di tipo 0 e non viene chiesto di modificarne il tipo. L'errore

di regime permanente in questo caso assume l'espressione

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)K_B(G)},$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode del processo $G(s)$, il cui valore (cfr. parte ii) di questo esercizio) è 10, mentre $K_B(C)$ è il guadagno di Bode del controllore, parametro da fissare. Il controllore PD può essere riscritto nella forma

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s \right),$$

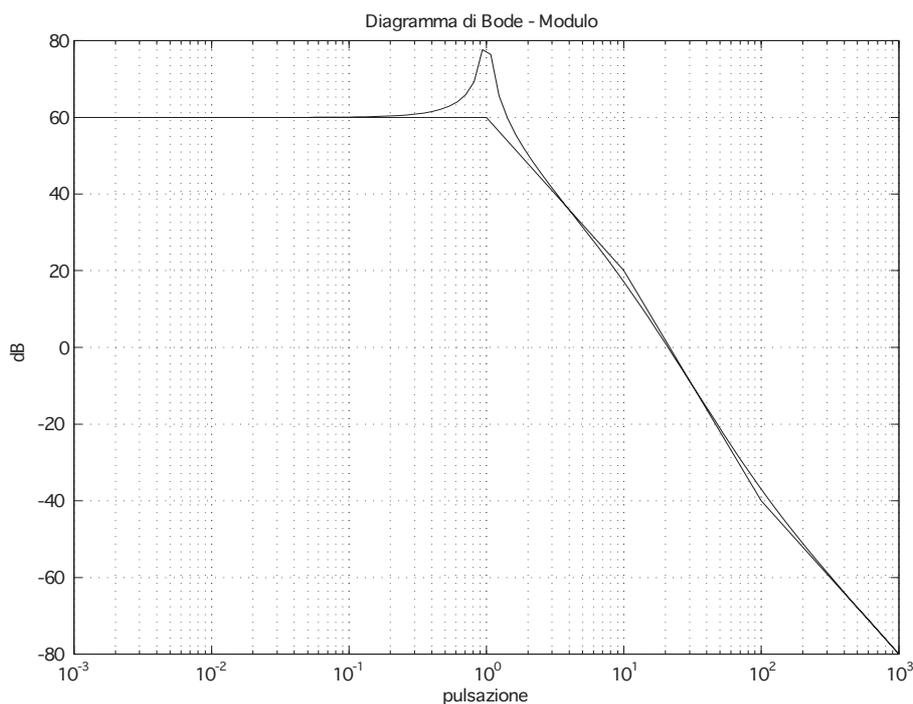
e, pertanto, K_p rappresenta il guadagno di Bode del controllore. Pertanto, se vogliamo che il sistema retroazionato sia di tipo 0 con errore di regime permanente al più 10^{-3} , è sufficiente imporre

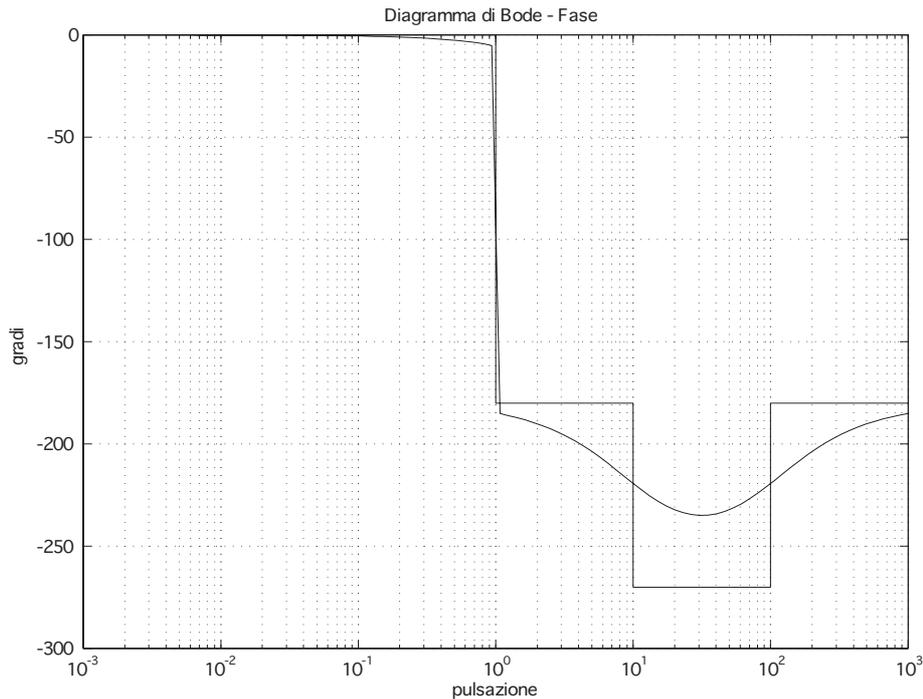
$$e_{rp} = \frac{1}{1 + 10K_p} \leq 10^{-3},$$

ovvero

$$K_p \geq 10^2 - 0.1 \approx 100.$$

Scegliamo, preliminarmente, $K_p = 10^2$ e tracciamo il diagramma di Bode di $K_p G(s)$, ottenendo il diagramma di Bode illustrato qui di seguito.





La pulsazione di attraversamento in questo caso è $\omega_A = 20$ rad/s mentre il margine di fase alla pulsazione desiderata ω_A^* è circa -45° . Se inseriamo uno zero in -10 , ovvero poniamo $\frac{K_d}{K_p} = 0.1$, e alziamo il diagramma delle ampiezze di 20 dB (il che corrisponde a moltiplicare per un ulteriore fattore 10 il guadagno K_p del controllore) otteniamo il risultato desiderato sia dal punto di vista della pulsazione di attraversamento che dal punto di vista del margine di fase. Pertanto il controllore PD desiderato è

$$C(s) = 10 \cdot 100 \left(1 + \frac{s}{10} \right) = 1000 + 100s.$$

Esercizio 2. i) [1 punto] Per $a \neq 0$ il sistema è causale, dal momento che $y(t)$ è esprimibile in funzione di valori di ingresso e uscita relativi a istanti non successivi a t . Per $a = 0$ l'equazione alle differenze diventa

$$y(t-1) - y(t-2) = -u(t-1)$$

o, equivalentemente,

$$y(t) - y(t-1) = -u(t),$$

e anche in tal caso è possibile esprimere $y(t)$ in funzione di valori di ingresso e uscita relativi a istanti non successivi a t . Pertanto il sistema è sempre interpretabile come un sistema causale.

ii) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è:

$$az^2 + (1-a)z - 1 = 0.$$

Distinguiamo i seguenti casi:

- $a = 0$;
- $a = -1$;
- $a \neq 0, -1$.

Per $a = 0$ l'equazione caratteristica diventa $z - 1 = 0$ e l'unico zero dell'equazione caratteristica è $\lambda = 1$, pertanto il sistema presenta il solo modo costante 1. Per $a = -1$ l'equazione caratteristica diventa

$$-z^2 + 2z - 1 = -(z - 1)^2 = 0$$

e l'unico zero dell'equazione caratteristica è $\lambda = 1$ di molteplicità 2. Il sistema presenta i modi 1 e t . Se $a \neq 0, -1$ gli zeri dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{a}$ (distinti e semplici), pertanto i modi del sistema sono

$$1 \quad \left(-\frac{1}{a}\right)^t.$$

Per ogni valore di a la presenza di un modo costante pregiudica la stabilità asintotica. Inoltre, per

$$\frac{1}{|a|} > 1$$

(ovvero $-1 < a < 1$) si ha instabilità come pure nel caso $a = -1$, situazione in cui i due zeri dell'equazione caratteristica sono collocati in 1 e quindi uno dei due modi diverge.

Nel caso $a = 1$ si hanno due zeri in 1 e -1 a cui corrispondono due modi limitati ma non convergenti. Non si ha perciò né asintotica stabilità né instabilità.

iii) [5 punti] Per $a = 0$, il sistema presenta il solo modo 1 e l'equazione caratteristica diventa

$$y(t) - y(t - 1) = -u(t), \quad t \in \mathbb{Z}_+.$$

Pertanto $n = 1$, $m = 1$, e la risposta impulsiva è esprimibile nella forma

$$w(t) = d_0\delta(t) + d_1\delta_{-1}(t - 1).$$

Da una semplice riscrittura dell'equazione alle differenze del sistema in cui si sostituisca a $u(t)$ l'impulso $\delta(t)$ e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, segue immediatamente che

$$w(t) - w(t - 1) = -\delta(t).$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} w(0) &= -1 \\ w(1) &= -1 \end{aligned}$$

e quindi

$$d_0 = -1, \quad d_1 = -1.$$

In altri termini,

$$w(t) = -\delta(t) - \delta_{-1}(t - 1) = -\delta_{-1}(t).$$

Per $a = -1$, il sistema presenta i modi $1, t$, e l'equazione caratteristica diventa

$$-y(t) + 2y(t-1) - y(t-2) = -u(t) - u(t-1), \quad t \in \mathbb{Z}_+.$$

Pertanto $n = 2, m = 1$, e la risposta impulsiva è esprimibile nella forma

$$w(t) = d_0\delta(t) + d_1\delta(t-1) + [d_2 + d_3t]\delta_{-1}(t-2).$$

Da una semplice riscrittura dell'equazione alle differenze del sistema in cui si sostituisca a $u(t)$ l'impulso $\delta(t)$ e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, segue immediatamente che

$$w(t) - w(t-1) = -\delta(t).$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} w(0) &= 1 \\ w(1) &= 3 \\ w(2) &= 5 \\ w(3) &= 7 \end{aligned}$$

e quindi

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 3, \quad d_2 = 1 \quad d_3 = 2.$$

In altri termini,

$$w(t) = \delta(t) + 3\delta(t-1) + [1 + 2t]\delta_{-1}(t-2) = [1 + 2t]\delta_{-1}(t).$$

Per $a \neq 0, -1$ $n = 2$ e $m = 1$ e la risposta impulsiva è esprimibile nella forma

$$w(t) = d_0\delta(t) + d_1\delta(t-1) + \left[d_2 + d_3 \left(-\frac{1}{a} \right)^t \right] \delta_{-1}(t-2).$$

Da una semplice riscrittura dell'equazione alle differenze del sistema in cui si sostituisca a $u(t)$ l'impulso $\delta(t)$ e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, segue immediatamente che

$$aw(t) + (1-a)w(t-1) - w(t-2) = a\delta(t) - \delta(t).$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} w(0) &= 1 = d_0 \\ w(1) &= \frac{a-2}{a} = d_1 \\ w(2) &= \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2} = d_2 + \frac{d_3}{a^2} \\ w(3) &= \frac{a^3 - 2a^2 + 2a - 2}{a^3} = d_2 - \frac{d_3}{a^3} \end{aligned}$$

e quindi

$$d_0 = 1, \quad d_1 = \frac{a-2}{a}, \quad d_2 = \frac{a-1}{a+1}, \quad d_3 = \frac{2}{a+1}.$$

In altri termini,

$$w(t) = \delta(t) + \frac{a-2}{a}\delta(t-1) + \left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{2}{a+1} \left(-\frac{1}{a}\right)^t \right] \delta_{-1}(t-2).$$

Esercizio 3. [4 punti] Da

$$W(j\omega) = \frac{j\omega(1+j\omega)}{1-\omega^2} = \frac{-\omega^2 + j\omega}{1-\omega^2}$$

segue

$$\operatorname{Re}\{W(j\omega)\} = \frac{-\omega^2}{1-\omega^2} \quad \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} = \frac{\omega}{1-\omega^2}.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \rightarrow 0^+$, $\omega \rightarrow 1^\pm$ e $\omega \rightarrow +\infty$, di $\operatorname{Re}\{W(j\omega)\}$ e $\operatorname{Im}\{W(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^-} \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} &= -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^-} \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} &= +\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^+} \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} &= +\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^+} \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} &= -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} &= 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\arg W(j\omega) = \arg \left(\frac{-\omega^2 + j\omega}{1-\omega^2} \right) = \begin{cases} \arctan^{-1} \left(-\frac{1}{\omega} \right) + 180^\circ & \text{se } 0 < \omega < 1 \\ \arctan^{-1} \left(-\frac{1}{\omega} \right) & \text{se } 1 < \omega \end{cases}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg\{W(j\omega)\} &= 90^\circ \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^-} \arg\{W(j\omega)\} &= 135^\circ \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^+} \arg\{W(j\omega)\} &= -45^\circ \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

Il diagramma di Nyquist risultante è illustrato in Figura 3.

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, Capitolo 6 pagina 141 e seguenti, e Capitolo 8, pagina 200 e seguenti.