COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
16 Aprile 2003

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \alpha^2 x_1(t), \\ x_2(t+1) &= -\alpha^2 x_1^2(t) - \alpha x_2(t), \end{aligned} \qquad t \geq 0,$$

dove α è un parametro reale.

i) Si determinino i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro α e, quando possibile, se ne studi la stabilità con il metodo di linearizzazione.

ii) Per i valori critici del parametro α, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine mediante l'analisi delle traiettorie del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + [\, g_1 \mid g_2 \,]\, u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t).$$

i) Si progetti, se possibile, un controllore in retroazione dal solo primo ingresso, in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia come modi tutti e soli i seguenti:

$$e^{-t}, te^{-t}, t^2 e^{-t}.$$

ii) Si progetti, se possibile, un controllore in retroazione dal solo secondo ingresso, in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia come modi tutti e soli i seguenti:

$$e^{-t}, te^{-t}.$$

iii) Si progetti, se possibile, un controllore in retroazione, in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia come modi tutti e soli i seguenti:

$$e^{-t}, te^{-t}.$$

Esercizio 3. Sia dato il sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) \qquad y(t) = Hx(t),$$

con

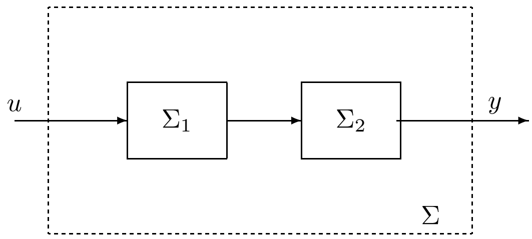
$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [\, 1 \quad -1 \quad 0 \,].$$

i) Supponendo di conoscere l'ingresso u in ogni istante e l'uscita negli istanti $0, 1$ e 2, si determini per quali istanti $t \geq 0$ sono in grado di determinare univocamente $x(t)$.

ii) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato $u(t) = Kx(t)$ che renda il sistema osservabile.

Teoria 1. Sia $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $t \geq 0$, un sistema non lineare a tempo continuo di dimensione n, avente l'origine come punto di equilibrio. Sia V una funzione di classe C^1 e definita positiva, definita in un intorno aperto W di 0 in $\mathbb{R}^n$ e a valori in $\mathbb{R}$. Si dimostri che se $\dot{V} := \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$ è semidefinita negativa, allora l'origine è punto di equilibrio (almeno) semplicemente stabile per il sistema.

Teoria 2. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo, Σ, ottenuto dalla connessione in serie, come mostrato in figura, di due sistemi SISO $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$.



Si dimostri che se Σ è osservabile e 0 è autovalore di molteplicità unitaria sia di F_1 che di F_2, allora il sistema Σ è instabile.

SOLUZIONI

Esercizio 1. [4 punti] i) I punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} x_{1e} &= \alpha^2 \, x_{1e}, \\ x_{2e} &= -\alpha^2 x_{1e}^2 - \alpha \, x_{2e}, \end{aligned}$$

o, equivalentemente, del sistema

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\alpha^2) \, x_{1e}, \\ (1+\alpha) \, x_{2e} &= -\alpha^2 x_{1e}^2. \end{aligned}$$

Per $\alpha \neq \pm 1$ la prima equazione ha come unica soluzione $x_{1e} = 0$ che, sostituita nella seconda equazione, porta a $(1+\alpha) \, x_{2e} = 0$. Quindi c'è un unico punto di equilibrio $\mathbf{x}_e = (0,0)$.
Se $\alpha = 1$, invece, la prima equazione è soddisfatta per ogni valore di x_{1e} mentre la seconda diventa $2x_{2e} = -x_{1e}^2$, e quindi ha come soluzioni tutte le coppie $(x_{1e}, -0.5x_{1e}^2)$, con x_{1e} un arbitrario numero reale. Se, invece, $\alpha = -1$, la prima equazione è soddisfatta per ogni valore di x_{1e} mentre la seconda diventa $0 = -x_{1e}^2$, e quindi ha come soluzioni tutte le coppie $(0, x_{2e})$, con x_{2e} un arbitrario numero reale.

Per valutare la stabilità di un arbitrario punto di equilibrio $\mathbf{x}_e$, linearizziamo il sistema attorno ad $\mathbf{x}_e$, ottenendo così

$$\Delta\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ -2\alpha^2 x_{1e} & -\alpha \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}(t),$$

per ciascuno degli $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$.

Se $|\alpha| \neq 1$, l'unico punto di equlibrio in esame è l'origine ed è evidente che se $|\alpha| < 1$ allora tale matrice ha entrambi gli autovalori di modulo minore di 1, pertanto la matrice del sistema linearizzato è asintoticamente stabile e l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile. Se $|\alpha| > 1$, invece, il sistema linearizzato è instabile e l'origine è punto di equlibrio instabile per il sistema non lineare di partenza. Consideriamo, ora, i casi $\alpha = \pm 1$. In entrambi i casi la matrice del sistema linearizzato ha due autovalori di modulo unitario e nessuno di modulo maggiore di 1, pertanto si tratta di casi indecidibili per linearizzazione.

ii) [5 punti] Nei casi indecidibili con il metodo di linearizzazione analizziamo l'equilibrio nell'origine attraverso l'analisi delle traiettorie. Nel caso $\alpha = 1$, il sistema diventa

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t), \qquad t \geq 0, \\ x_2(t+1) &= -x_1^2(t) - x_2(t), \end{aligned}$$

ed è immediato verificare che fissata un'arbitraria condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0))$ si ha

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(0), \qquad\qquad t \geq 0, \\ x_2(t+1) &= -x_1^2(0) - x_2(t), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0), \qquad\qquad t \geq 0, \\ x_2(t) &= (-1)^t \, x_2(0) + (-1)^t \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^i \cdot x_1^2(0) = \begin{cases} x_2(0) & \text{per } t \text{ pari;} \\ -\, x_2(0) - x_1^2(0) & \text{per } t \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto il sistema risulta semplicemente stabile.

Nel caso $\alpha = -1$ il sistema diventa

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(t), \qquad t \geq 0, \\ x_2(t+1) &= -x_1^2(t) + x_2(t), \end{aligned}$$

ed è immediato verificare che fissata un'arbitraria condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = (x_1(0), x_2(0))$ si ha

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= x_1(0), \qquad t \geq 0, \\ x_2(t+1) &= -x_1^2(0) + x_2(t), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(0), \qquad t \geq 0, \\ x_2(t) &= x_2(0) - \sum_{i=0}^{t-1} x_1^2(0) = x_2(0) - t \cdot x_1^2(0). \end{aligned}$$

Pertanto il sistema risulta instabile.

Esercizio 2. i) [3 punti] Poiché la coppia (F, g_1) è chiaramente una forma canonica di controllo, è possibile attribuire alla matrice del sistema, ottenuto per retroazione dal solo primo ingresso, un polinomio caratteristico arbitrario, in questo caso $(s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$. Poiché la matrice risultante sarà necessariamente in forma compagna e quindi ciclica, il polinomio minimo della matrice risultante coinciderà col polinomio caratteristico, e quindi i modi del sistema coincideranno con quelli richiesti. La matrice k_1 tale che $F + g_1 k_1$ ha polinomio caratteristico e minimo pari a $(s+1)^3$ si trova imponendo

$$F + g_1 k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si trova, pertanto, $k_1 = [\,-2 \quad -5 \quad -2\,]$ e, quindi

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii) [2 punti] È immediato verificare che la coppia (F, g_2) è a sua volta una coppia raggiungibile, ovvero il sistema è raggiungibile dal secondo ingresso. Pertanto, il sistema che ottengo applicando una retroazione dal solo secondo ingresso sarà a sua volta raggiungibile. Ma allora la matrice del sistema, $F + g_2 k_2$, continuerà ad essere ciclica. Di conseguenza, il problema non è risolubile.

iii) [4 punti] Il sistema, essendo già raggiungibile dal solo primo ingresso, lo è a maggior ragione da entrambi gli ingressi. Il calcolo degli invarianti di controllo fornisce $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$, pertanto, per il teorema di Rosenbrock, il problema posto ha soluzione, che si ottiene imponendo $\psi_1(s) = (s+1)^2$ e $\psi_2(s) = s + 1$. Poiché il sistema è, a meno di un opportuno riordino delle componenti del vettore di stato (una permutazione) in forma canonica di controllo multivariabile è sufficiente attribuire alla matrice $F + GK$ la seguente forma:

$$F + GK = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ciò è possibile scegliendo

$$K = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. i) [3 punti] La matrice di osservabilità del sistema è data da

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice è chiaramente singolare, e quindi il sistema risulta non osservabile (in $[0,2]$). Dalla conoscenza di $u(0), u(1), y(0), y(1)$ e $y(2)$ riesco a stimare il vettore stato iniziale $x(0) = x_0$ a meno di un vettore di

$$X^{no} = \ker\mathcal{O} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle,$$

e quindi non è noto univocamente. Per $t > 0$, lo stato $x(t)$ è dato da

$$x(t) = F^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} F^{t-1-i} g u(i).$$

Ovviamente, essendo noto l'ingresso ad ogni istante, la componente forzata di $x(t)$ è univocamente determinata. Per quanto riguarda la componente libera, invece, osservo che lo stato iniziale x_0 è noto a meno di un vettore $v \in X^{no}$. Poiché $X^{no} = \ker F = \ker F^t$ per ogni $t > 0$, ne consegue che $x(t)$ può essere determinato in modo univoco dai dati a disposizione per ogni $t > 0$.

ii) [3 punti] Se $K = [\,a \quad b \quad c\,]$, la matrice del sistema retroazionato diventa

$$F + gK = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1+b & c \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di osservabilità del sistema retroazionato è data da

$$\mathcal{O}_K = \begin{bmatrix} H \\ H(F+gK) \\ H(F+gK)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1-a & -b & -c \\ 1-a-ab & 1-a-b-b^2+c & -bc \end{bmatrix},$$

e il suo determinante coincide con $\det \mathcal{O}_K = c(2 + c - 2a - b)$. Pertanto, scegliendo, ad esempio $c = 1$ e $a = b = 0$ ottengo un controllore che rende il sistema osservabile.

Teoria 1. [4 punti] Si veda il testo "Appunti di Teoria dei Sistemi", di E.Fornasini e G.Marchesini, nel capitolo sulla Stabilità.

Teoria 2. [3 punti] È sufficiente osservare che essendo Σ osservabile da un solo ingresso, la matrice F di Σ risulta ciclica. Ma allora, poiché 0 è autovalore di molteplicità due della matrice F, ne consegue che ad esso viene associato, nella forma di Jordan della matrice F, un unico miniblocco di dimensione 2. Ciò significa che a tale autovalore sono associati, per il sistema Σ, i due modi 1 e t, e quindi il sistema è instabile.