COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
13 Febbraio 2003

Esercizio 1. Consideriamo il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - \left(a + \frac{1}{2}\right) y(t-1) + \frac{a}{2} y(t-2) = u(t-1) - 2u(t-2), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

i) Determinare, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'evoluzione libera del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$y(-1) = 0 \qquad y(-2) = 4.$$

ii) Per $a = 1/2$ determinare l'espressione della risposta impulsiva del sistema e studiare la stabilità BIBO del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - 5\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 50\frac{dy(t)}{dt} - 1000y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - 10\frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

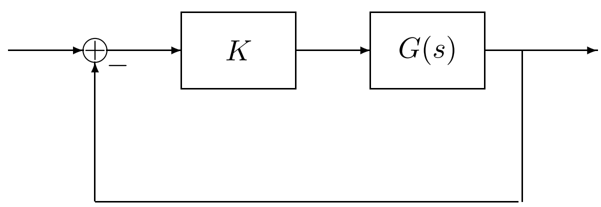
ii) Si determini (in modo approssimato) la risposta impulsiva del sistema, $w(t)$.

iii) Si tracci il diagramma di Bode della funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema.

Esercizio 3. Dato il sistema (lineare, tempo-invariante, causale e a tempo continuo) di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+10}{s(s-1)},$$

si supponga di applicare al sistema un controllo in retroazione (unitaria negativa) sulla cui catena di azione diretta agisca un controllore proporzionale K come illustrato in figura:



Si studi al variare di $K \in \mathbb{R}_+$ la stabilità BIBO del sistema retroazionato, evidenziando gli eventuali valori critici del parametro K,

i) facendo uso della tabella di Routh e

ii) facendo uso della famiglia dei diagrammi di Nyquist di $KG(j\omega)$, $K \in \mathbb{R}_+$.

iii) Per $K = 10$ si determini, almeno in modo approssimativo e se possibile, la risposta di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = [1 + 0.1 \sin(10t)]\delta_{-1}(t).$$

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti, si derivi dettagliatamente la descrizione della dinamica del sistema come somma di evoluzione libera ed evoluzione forzata nel dominio delle trasformate di Laplace.

SOLUZIONI

Esercizio 1. [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = z^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right) z + \frac{a}{2} = \left(z - \frac{1}{2}\right)(z - a)$$

ed essa ha due radici reali $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = 1/2$. Per $a = 1/2$ l'equazione caratteristica presenta un'unica radice di molteplicità 2 e, pertanto, il sistema ha due modi reali distinti associati a tale radice, ovvero

$$\frac{1}{2^t}, \qquad t \cdot \frac{1}{2^t}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

L'evoluzione libera ha la seguente struttura

$$y_\ell(t) = c_1 \frac{1}{2^t} + c_2 t \cdot \frac{1}{2^t},$$

e, imponendo il soddisfacimento delle condizioni iniziali, si trova

$$\begin{aligned} 0 &= y(-1) = y_\ell(-1) = 2c_1 - 2c_2 \\ 4 &= y(-2) = y_\ell(-2) = 4c_1 - 8c_2, \end{aligned}$$

da cui segue $c_1 = c_2 = -1$, ovvero

$$y_\ell(t) = -(1+t)\frac{1}{2^t}.$$

Per $a = 0$ l'equazione caratteristica presenta due radici distinte in 0 e $1/2$, entrambe di molteplicità 1 e, pertanto, il sistema ha due modi reali distinti associati a tali radici, ovvero

$$\delta(t+2), \qquad \frac{1}{2^t}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

L'evoluzione libera ha la seguente struttura

$$y_\ell(t) = c_1 \delta(t+2) + c_2 \frac{1}{2^t},$$

e, imponendo il soddisfacimento delle condizioni iniziali, si trova

$$\begin{aligned} 0 &= y(-1) = y_\ell(-1) = 2c_2 \\ 4 &= y(-2) = y_\ell(-2) = c_1 + 4c_2, \end{aligned}$$

da cui segue $c_1 = 4$ e $c_2 = 1/3$, ovvero

$$y_\ell(t) = 4\delta(t+2).$$

Infine, per $a \neq 0, 1/2$ si trova

$$y_\ell(t) = c_1 a^t + c_2 \frac{1}{2^t},$$

e, imponendo il soddisfacimento delle condizioni iniziali, si trova

$$\begin{aligned} 0 &= y(-1) = y_\ell(-1) = \frac{c_1}{a} + 2c_2 \\ 4 &= y(-2) = y_\ell(-2) = \frac{c_1}{a^2} + 4c_2, \end{aligned}$$

da cui segue $c_1 = -8a^2/(4a-2)$ e $c_2 = 4a/(4a-2)$, ovvero

$$y_\ell(t) = -\frac{8a^2}{4a-2}a^t + \frac{4a}{4a-2}\frac{1}{2^t} = \frac{2a}{2a-1}\left(\frac{1}{2^t} - 2a^{t+1}\right).$$

ii) [3 punti] Per $a = 1/2$ l'equazione caratteristica del sistema ha l'unica radice $\lambda = 1/2$ di molteplicità 2. Inoltre il sistema presenta $n = 2$ e $m = 0$ per cui l'espressione analitica della risposta impulsiva risulta del tipo

$$w(t) = d_0\ \delta(t) + \left(d_1\frac{1}{2^t} + d_2 t \cdot \frac{1}{2^t}\right)\ \delta_{-1}(t-1).$$

Dall'equazione alle differenze descrittiva il sistema, valutata imponendo $u(t) = \delta(t)$, $y(t) = w(t)$ e condizioni iniziali nulle, otteniamo i valori della riposta impulsiva per $t = 0, 1, 2$,

$$\begin{aligned} w(0) - 0 + 0 &= 0 - 0 \\ w(1) - w(0) + 0 &= 1 - 0 \\ w(2) - w(1) + \frac{1}{4}w(0) &= 0 - 2, \end{aligned}$$

ovvero

$$w(0) = 0, \qquad w(1) = 1, \qquad w(2) = -1.$$

Imponendo

$$\begin{aligned} 0 &= w(0) = d_0\delta(t) \\ 1 &= w(1) = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} \\ -1 &= w(2) = \frac{d_1}{4} + \frac{d_2}{2}, \end{aligned}$$

si trova

$$d_0 = 0, \qquad d_1 = 8, \qquad d_2 = -6,$$

che porta a

$$w(t) = \left(8\frac{1}{2^t} - 6t \cdot \frac{1}{2^t}\right)\ \delta_{-1}(t-1).$$

Chiaramente la risposta impulsiva è sommabile e pertanto il sistema è BIBO stabile.

Esercizio 2. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 - 5s^2 + 50s - 1000.$$

È immediato rendersi conto del fatto che i coefficienti del polinomio $d(s) = s^3 - 5s^2 + 50s-1000$ hanno segni alterni e quindi $d(s)$ non può essere un polinomio di Hurwitz. Per valutare se il sistema è BIBO stabile, andiamo ora a valutare la funzione di trasferimento del sistema. Si trova

$$W(s) = \frac{s(s-10)}{s^3 - 5s^2 + 50s - 1000}.$$

Se il polinomio $d(s)$ che compare come denominatore nella precedente rappresentazione della funzione di trasferimento ha uno zero in 0 oppure in 10 e i rimanenti zeri sono tutti nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$, allora la funzione $W(s)$ ha tutti i poli a parte reale minore di 0 e, pertanto il sistema risulta essere BIBO stabile. In tutti gli altri casi non ci può essere stabilità BIBO.

È evidente che $d(0) \neq 0$, per cui 0 non può essere uno zero di $d(s)$. Per $s = 10$ si trova, invece,

$$d(10) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^2 - 10^3 = 0,$$

da ciò segue immediatamente che $(s-10) \mid d(s)$ (ovvero $s-10$ è un divisore di $d(s)$). Si trova facilmente che

$$d(s) = (s-10)(s^2 + 5s + 100)$$

da cui segue che

$$W(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 100}.$$

Di conseguenza, il sistema è BIBO stabile.

ii) [4 punti] Per valutare la risposta impulsiva del sistema è sufficiente antitrasformare secondo Laplace la precedente funzione di trasferimento $W(s)$. Ricordando che

$$\mathcal{L}\left(e^{\sigma t}\cos(\omega t)\right) = \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \qquad \mathcal{L}\left(e^{\sigma t}\sin(\omega t)\right) = \frac{\omega}{(s-\sigma)^2 + \omega^2},$$

possiamo riscrivere la $W(s)$ nella forma

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{s}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(100 - \frac{25}{4}\right)} \approx \frac{s}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + 100} \\ &= \frac{s+\frac{5}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + 100} - \frac{\frac{5}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + 100} = \frac{s+\frac{5}{2}}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + 100} - \frac{5}{20}\frac{10}{\left(s+\frac{5}{2}\right)^2 + 100}, \end{aligned}$$

a cui corrisponde come antitrasformata

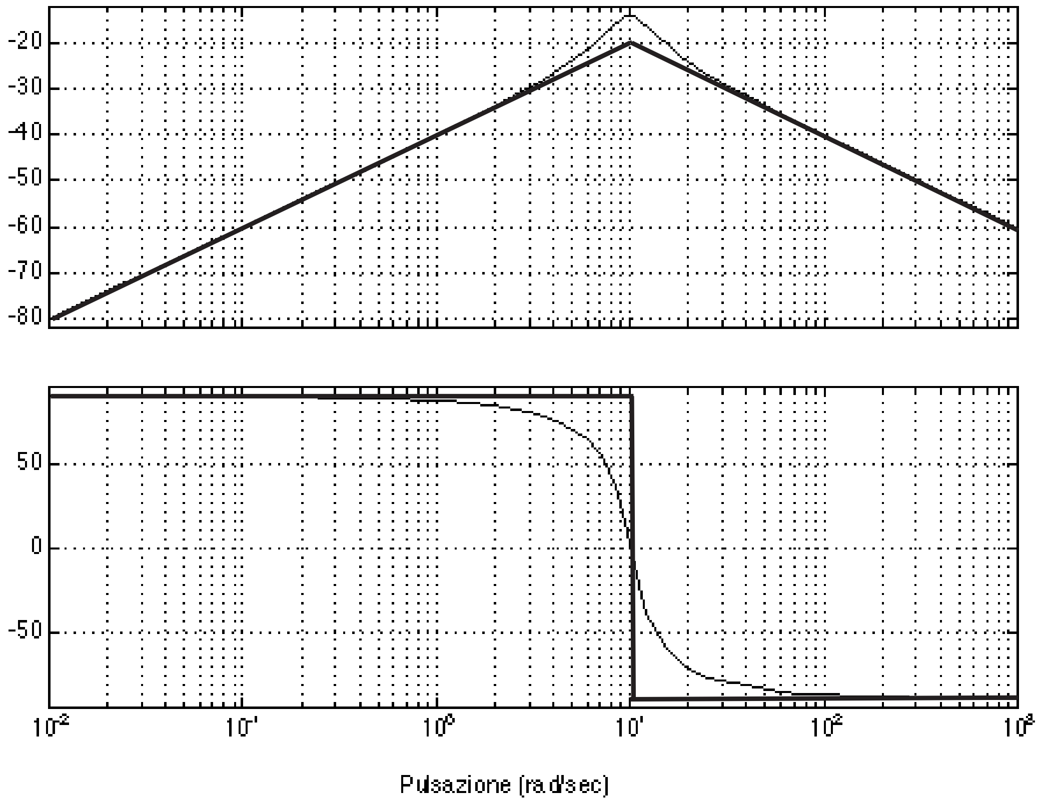
$$w(t) = \left(e^{-\frac{5}{2}t}\cos(10t) - \frac{1}{4}e^{-\frac{5}{2}t}\sin(10t)\right)\delta_{-1}(t).$$

iii) [3 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$W(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 100} = \frac{1}{100}\frac{s}{1 + 2\frac{1}{4}\frac{s}{10} + \frac{s^2}{10^2}}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento ha guadagno di Bode 10^{-2} (ovvero $|K_B|_{\mathrm{dB}} = -40$ dB e $\arg(K_B) = 0^o$). I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi presentano un solo punto di spezzamento corrispondente ad un termine trinomio con pulsazione naturale $\omega_n = 10$ rad/sec e coefficiente di smorzamento

$\xi = 1/4$). Oltre a questi termini, inoltre, bisogna tener conto dello zero semplice nell'origine, che fa partire il diagramma delle ampiezze con pendenza 20 dB/decade e dà un ulteriore contributo di 90^o al diagramma delle fasi (che parte, pertanto, dal valore 90^o). Il risultato è illustrato in figura.



Esercizio 3. i) [2 punti] Posto

$$n(s) := s + 10 \qquad d(s) := s(s-1),$$

la funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa risulta

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{Kn(s)}{d(s) + Kn(s)},$$

ed essendo $n(s)$ e $d(s)$ coprimi, anche $Kn(s)$ e $d(s) + Kn(s)$ lo sono per ogni scelta di $K \neq 0$. Pertanto i poli della $W(s)$ coincidono con gli zeri di $d(s) + Kn(s)$. Per capire se $W(s)$ è BIBO stabile è allora sufficiente appurare, mediante la regola dei segni di Cartesio, per quali valori di $K \in \mathbb{R}_+$ il polinomio $d(s) + Kn(s) = s^2 + (K-1)s + 10K$ è di Hurwitz. È immediato rendersi conto del fatto che ciò accade se e solo se $K > 1$.

ii) [5 punti] Per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist andiamo a valutare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento in catena aperta

$$KG(s) = K\,\frac{s+10}{s(s-1)}$$

per valori di K positivi e per $\omega \in \mathbb{R}_+$. Da

$$KG(j\omega) = K\ \frac{j\omega + 10}{-\omega^2 - j\omega} = K\ \frac{-11\omega^2 + j\omega(10-\omega^2)}{\omega^4 + \omega^2}$$

segue

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \frac{-11K}{\omega^2+1} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{K(10-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}.$$

Pertanto, per $K > 0$, si ha

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} < 0, \qquad \text{per } \omega \geq 0,$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < \omega < \sqrt{10}; \\ 0 & \text{per } \omega = \sqrt{10}; \\ < 0 & \text{per } \omega > \sqrt{10}. \end{cases}$$

Per $\omega = \sqrt{10}$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = -K \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = 0.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\}$ e $\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= -11K \\ \lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= +\infty \\ \lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\arg KG(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega(10-\omega^2)}{-11\omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{\omega(\omega^2-10)}{11\omega^2}\right).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to 0^+} \arg\{G(j\omega)\} &= 90^o; \\ \lim_{\omega\to +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= -90^o. \end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che il comportamento per $\omega < 0$ si trova per simmetria, rovesciando la porzione di diagramma relativa a pulsazione non negative, il diagramma di Nyquist di $KG(j\omega)$ per $K > 0$ risulta, pertanto, illustrato in Figura 2. Poichè $KG(s)$ ha un polo nell'origine, e pertanto il corrispondente diagramma di Nyquist non si mantiene al finito, adottiamo un percorso di Nyquist modificato che ci permette di evitare il passaggio per l'origine, in modo da riportare il diagramma al finito e poter, quindi, valutare il numero N di giri che il diagramma di Nyquist compie in verso antiorario attorno al punto $-1 + j0$ (cfr. Figura 3).

Risulta allora evidente dal diagramma che

- per $0 < K < 1$, $N = -1$ ed essendo $n_{G+} = 1$ e $N = n_{G+} - n_{W+}$, ne consegue $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile;
- per $K > 1$, $N = 1$ ed essendo $n_{G+} = 1$ ne consegue $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile;
- per $K = 1$ si ha passaggio per il punto critico $-1+j0$. Ciò ci permette di dire che $W(s)$ ha due poli a parte reale nulla (complessi coniugati) e pertanto il sistema retroazionato è instabile.

iii) [3 punti] Per $K = 10$, in base alla precedente analisi, il sistema è BIBO stabile, per cui esiste la risposta di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = [1 + 0.1 \sin(10t)]\delta_{-1}(t),$$

e tale risposta ha la seguente espressione:

$$y_{rp}(t) = [W(j0) + 0.1\ |W(j10)| \sin(10t + \arg W(j10))]\delta_{-1}(t).$$

Per $K = 10$ la funzione di trasferimento del sistema retroazionato diventa

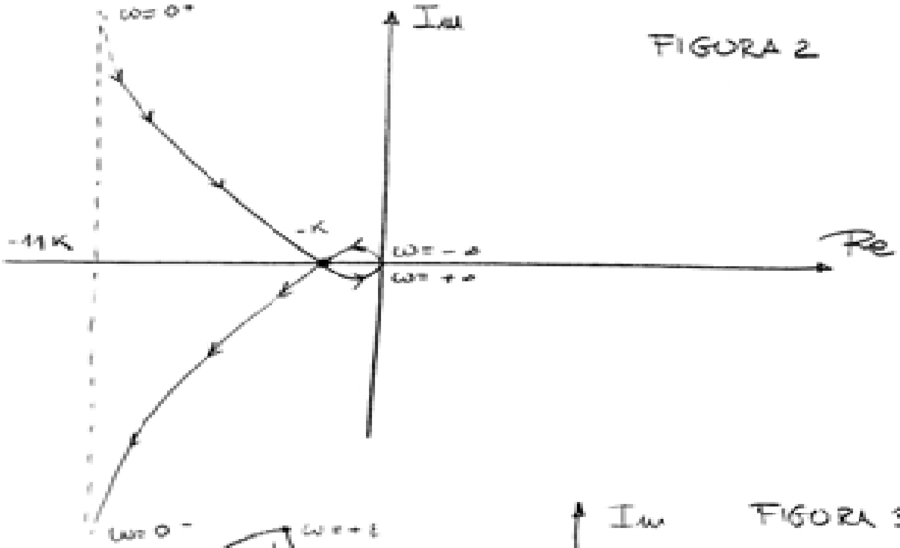
$$W(s) = 10\ \frac{s + 10}{s^2 + 9s + 100}.$$

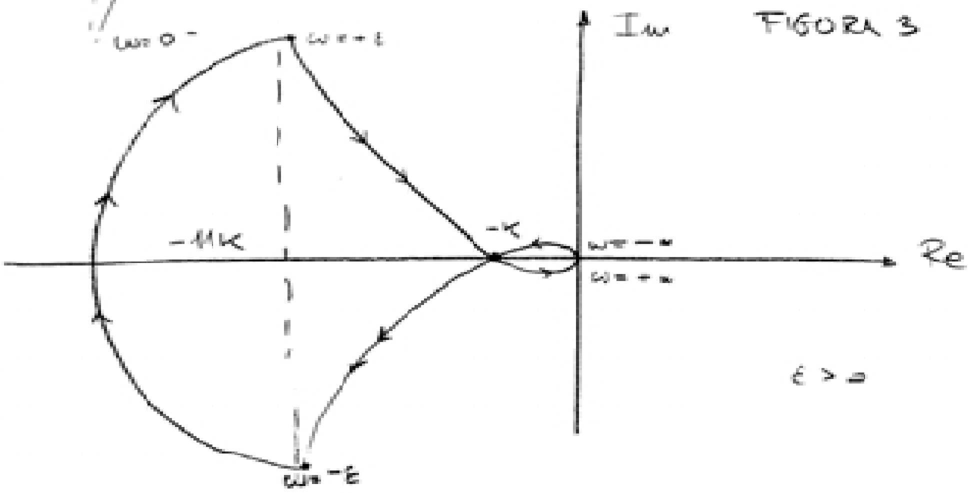
Si trova facilmente:

$$W(j0) = 1 \qquad W(j10) = 10\ \frac{j10 + 10}{-100 + j90 + 100} = \frac{j10 + 10}{j9}$$

e quindi

$$|W(j10)| = \frac{\sqrt{200}}{9} \qquad \arg(W(j10)) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$





Teoria. [4 punti] Si veda il Capitolo 3, paragrfo 3.3, del Libro di testo.