COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
29 Gennaio 2003

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1-a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + (4+a)y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$

ii) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 0.$$

iii) Si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t)$.

iv) Si tracci il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema.

Esercizio 2. Dato il modello ingresso/uscita a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$W(s) = 10^5 \, \frac{s(s^2-1)}{(s+10)(s^2+10^4)},$$

si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

Esercizio 3. Si consideri il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s+1}.$$

Si progetti un controllore PI (proporzionale integrativo) $C(s)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 1;

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 100$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discuta le possibili estensioni.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$as^3 + (1-a)s^2 + 4s + (4+a) = 0.$$

Il sistema risulta asintoticamente stabile se e solo se la precedente equazione caratteristica presenta tutte le radici nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$. Consideriamo prima il caso $a = 0$. In tal caso il sistema diventa di secondo ordine ed è immediato rendersi conto (applicando la regola dei segni di Cartesio) che l'equazione caratteristica

$$s^2 + 4s + 4 = 0$$

ha solo radici a parte reale negativa. Pertanto c'è stabilità asintotica.

Consideriamo ora il caso $a \neq 0$. Per verificare, al variare di a, se la precedente equazione ha tutte le radici a parte reale negativa oppure no è sufficiente costruire la corrispondente tabella di Routh. Si ottiene, allora,

$$\begin{array}{c|cc}
3 & a & 4 \\
2 & 1-a & 4+a \\
 & & \\
1 & \dfrac{4-8a-a^2}{1-a} & 0 \\
 & & \\
0 & 4+a & 0
\end{array}$$

Il polinomio $as^3 + (1-a)s^2 + 4s + (4+a)$ ha radici tutte a parte reale negativa se e solo se la prima colonna della tabella di Routh ha tutti i coefficienti non nulli e di ugual segno. Se imponiamo che siano tutti positivi otteniamo la famiglia di vincoli

$$\begin{cases} a > 0 \\ 1-a > 0 \\ 4-8a-a^2 > 0 \\ 4+a > 0. \end{cases}$$

Poichè la condizione $4 - 8a - a^2 > 0$ è verificata solo per

$$-4 - 2\sqrt{5} < a < -4 + 2\sqrt{5} =: a_{\max}$$

e quest'ultima grandezza è positiva ma minore di 1, ne consegue che la famiglia di vincoli è verificata per

$$0 < a < a_{\max}.$$

Se, invece, imponiamo che siano tutti negativi otteniamo la famiglia di vincoli

$$\begin{cases} a < 0 \\ 1-a < 0 \\ 4-8a-a^2 < 0 \\ 4+a < 0. \end{cases}$$

che non ha soluzione. Pertanto, il sistema risulta asintoticamente stabile se e solo se

$$0 \leq a < a_{\max}.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, chiaramente il sistema risulta BIBO stabile per i medesimi valori di a per cui esso è asintoticamente stabile. La situazione in cui il sistema risulti BIBO stabile senza essere asintoticamente stabile può verificarsi se e solo se per qualche valore di a la funzione di trasferimento del sistema ha tutti i poli a parte reale negativa, nonostante il polinomio $as^3 + (1-a)s^2 + 4s + (4+a)$ non sia di Hurwitz. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2+1}{as^3 + (1-a)s^2 + 4s + (4+a)}$$

e la situazione precedentemente delineata, alla luce del fatto che il polinomio al numeratore ha due radici immaginarie coniugate e il polinomio al denominatore è a coefficienti reali, si può verificare solo se s^2+1 divide $as^3+(1-a)s^2+4s+(4+a)$, ovvero esistono coefficienti k_1 e k_0 tali che

$$as^3 + (1-a)s^2 + 4s + (4+a) = (s^2+1)(k_1 s + k_0).$$

È immediato rendersi conto che tali coefficienti k_1 e k_0 non esistono. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se

$$0 \leq a < a_{\max}.$$

ii) [2 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2$$

e, pertanto il sistema presenta due modi associati alla radice -2 di molteplicità 2, ovvero:

$$e^{-2t}, t \cdot e^{-2t}.$$

L'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned}
1 = \quad & y(0^-) && = \quad y_\ell(0^-) && = \quad c_1 \\
0 = \quad & \left.\tfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} && = \quad \left.\tfrac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} && = \quad -2c_1 + c_2,
\end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad c_2 = 2.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

iii) [3 punti] Calcoliamo la risposta impulsiva come antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento del sistema. Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2+1}{s^2+4s+4} = \frac{s^2+1}{(s+2)^2}.$$

Notiamo, preliminarmente, che il sistema è proprio ma non strettamente proprio e

$$W(\infty) = \lim_{s\to\infty} W(s) = 1.$$

Pertanto

$$W(s) = 1 + W_{sp}(s),$$

dove

$$W_{sp}(s) = -\frac{4s+3}{(s+2)^2}.$$

inoltre lo sviluppo in fratti semplici di $W_{sp}(s)$ porta a

$$W_{sp}(s) = -\frac{4}{s+2} + \frac{5}{(s+2)^2}.$$

Pertanto l'antitrasformata di $W(s)$ è

$$w(t) = \delta(t) - 4e^{-2t}\delta_{-1}(t) + 5te^{-2t}\ \delta_{-1}(t).$$

iv) [4 punti] La risposta in frequenza del sistema è

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \frac{1-\omega^2}{(4-\omega^2)+j4\omega} = \frac{(1-\omega^2)(4-\omega^2) - j4\omega(1-\omega^2)}{(4-\omega^2)^2+16\omega^2},$$

ed ha parte reale

$$\mathrm{Re}\{W(j\omega)\} = \frac{(1-\omega^2)(4-\omega^2)}{(4-\omega^2)^2+16\omega^2}$$

e coefficiente immaginario

$$\mathrm{Im}\{W(j\omega)\} = -\frac{4\omega(1-\omega^2)}{(4-\omega^2)^2+16\omega^2}.$$

Studiamo il suo andamento per $\omega \geq 0$. La parte relativa a pulsazioni negative si otterrà per simmetria.

Lo studio dei segni di parte reale ed immaginaria porta a

$$\mathrm{Re}\{W(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < \omega < 1; \\ < 0 & \text{per } 1 < \omega < 2; \\ > 0 & \text{per } \omega > 2, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{W(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 < \omega < 1; \\ > 0 & \text{per } \omega > 1. \end{cases}$$

Il grafico presenta alcuni punti notevoli in corrispondenza alle pulsazioni $\omega = 0, 1, 2$. Si trova

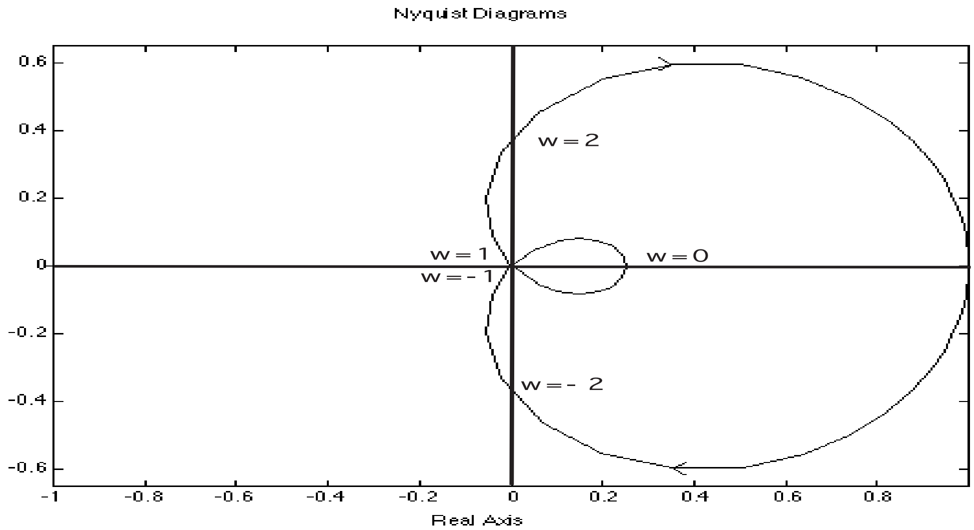
$$\text{per } \omega = 0 \qquad W(j0) = 1/4,$$

$$\begin{array}{lll} \text{per } \omega = 1 & W(j1) = 0, & \\ \text{per } \omega = 2 & \text{Re}\{W(j2)\} = 0 & \text{Im}\{W(j2)\} = \dfrac{3}{8}. \end{array}$$

In assenza di poli a parte reale nulla per la $W(s)$, è sufficiente valutare i limiti per $\omega \to +\infty$ della risposta in frequenza, ovvero:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to+\infty} \text{Re}\{W(j\omega)\} &= 1 \\ \lim_{\omega\to+\infty} \text{Im}\{W(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

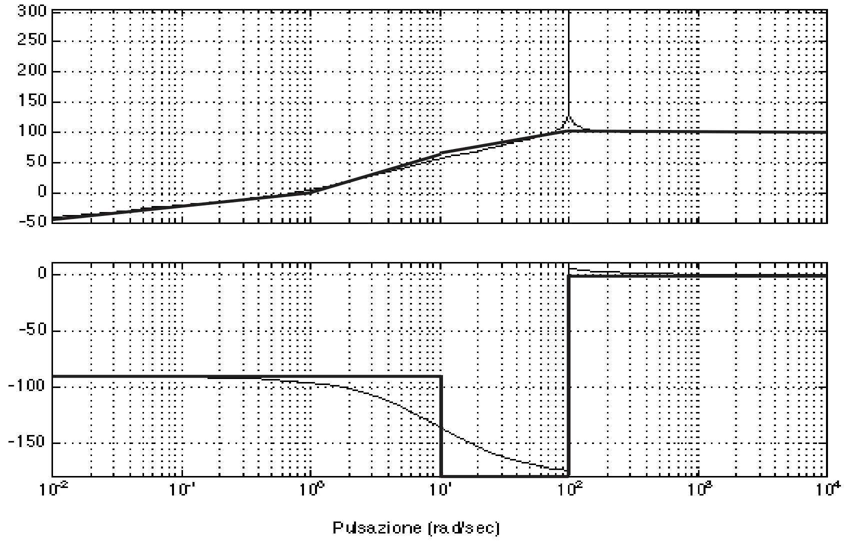
Queste informazioni sono sufficienti per tracciare il diagramma di Nyquist che risulta essere il seguente:



Esercizio 2. [5 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$W(s) = -\frac{s(1-s^2)}{(1+0.1s)(1+10^{-4}s^2)}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento ha guadagno di Bode -1 (ovvero $|K_B|_{\text{dB}} = 0$ dB e $\arg(K_B) = -180^o$). I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi presentano inoltre tre punti di spezzamento: uno corrispondente sia ad uno zero reale positivo in 1 che ad uno zero negativo in -1, uno corrispondente ad un polo reale negativo in -10 ed uno corrispondente ad una coppia di poli immaginari puri, complessi coniugati, collocati in $\pm j100$ (ovvero un termine trinomio con pulsazione naturale $\omega_n = 100$ rad/sec e coefficiente di smorzamento $\xi = 0$). Oltre a questi termini, inoltre, bisogna tener conto dello zero semplice nell'origine, che fa partire il diagramma delle ampiezze con pendenza 20 dB/decade e dà un ulteriore contributo di 90^o al diagramma delle fasi (che parte, pertanto, dal valore $-90^o = 270^0$). Il risultato è illustrato in figura.



Esercizio 3. [6 punti] Un controllore di tipo PI ha la seguente struttura

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s},$$

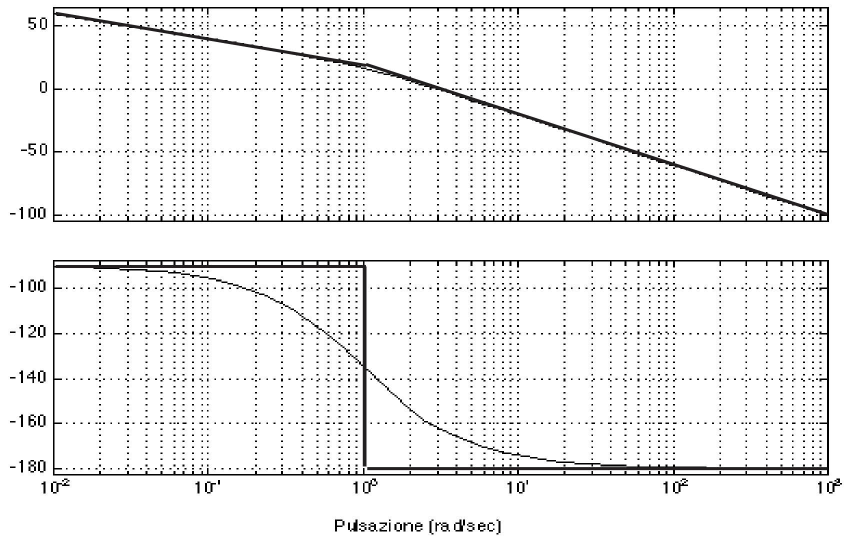
con K_p e K_i parametri reali. Affinché il tipo del sistema sia 1 è necessario introdurre nella funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$, un polo semplice nell'origine. Ciò automaticamente assicura che K_i sia non nullo. Andiamo ora a scegliere i valori di K_p e $K_i \neq 0$ in modo da soddisfare entrambi i vincoli ii) e iii). Poiché

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot K_i \cdot \left(1 + s\frac{K_p}{K_i}\right),$$

è conveniente tracciare il diagramma di Bode di

$$G'(s) := G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{10}{s(s+1)}$$

e poi determinare i valori del guadagno del controllore K_i e dello zero del controllore (reale e collocato in $-K_i/K_p$) in modo tale da ottenere pulsazione di attraversamento e margine di fase desiderati. Graficamente si trova



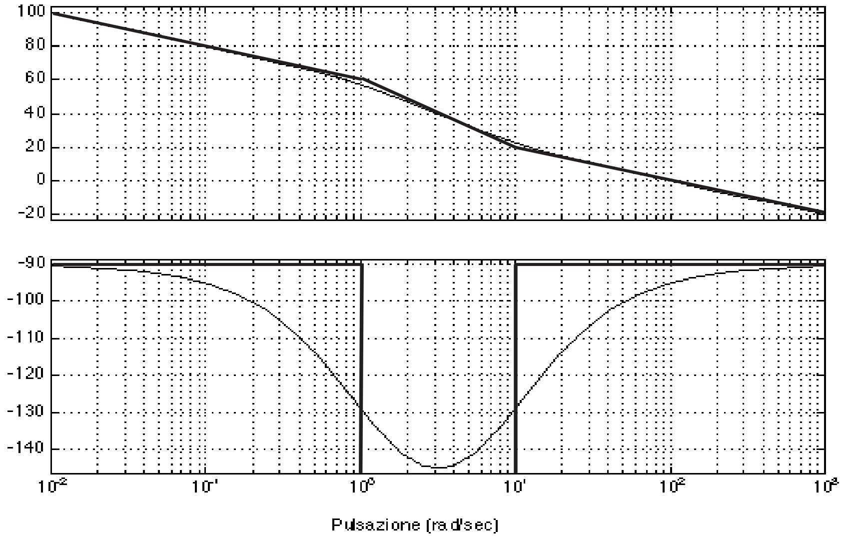
È immediato rendersi conto del fatto che, se introduciamo, ad esempio, uno zero in -10 (ovvero imponiamo $K_i/K_p = 10$) possiamo garantire che alla pulsazione desiderata $\omega_A^* = 100$ rad/sec il margine di fase sia certamente superiore a 45^o. A questo punto per garantire che la pulsazione di attraversamento sia circa 100 rad/sec è sufficiente imporre che, per $\omega = \omega_A^* = 100$ rad/sec la funzione

$$G(j\omega)C(j\omega) = 10K_i \cdot \frac{1 + 0.1j\omega}{j\omega(1 + j\omega)}$$

abbia modulo unitario. Dal grafico si deduce immediatamente che a questo risultato si perviene alzando il diagramma del modulo di circa 40 dB ovvero assumendo $K_i = 100$. Il controllore PI diventa, allora,

$$C(s) = 10 + \frac{100}{s}.$$

Verifichiamo graficamente di aver ottenuto il risultato desiderato.



Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 160 e successive.