COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
27 Giugno 2003

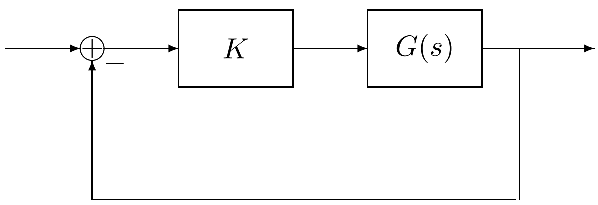
Esercizio 1.

i) Dato il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{du(t)}{dt} + u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

se ne determini la risposta impulsiva del sistema, $g(t)$.

ii) Detta $G(s)$ la funzione di trasferimento del sistema (1), si supponga di applicare al sistema un controllo in retroazione (unitaria negativa) sulla cui catena di azione diretta agisca un controllore proporzionale K come illustrato in figura:



Si studi al variare di $K \neq 0$ la stabilità BIBO del sistema retroazionato, evidenziando gli eventuali valori critici del parametro K, facendo uso della famiglia dei diagrammi di Nyquist di $KG(j\omega)$, $K \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Consideriamo il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - ay(t-2) = u(t) + 2u(t-2), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

i) Determinare l'espressione dei modi del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) trovare il valore di a per cui i modi dell'evoluzione libera sono di tipo sinusoidale e, per tale valore di a, determinare l'espressione dell'evoluzione libera a partire da condizioni iniziali $y(-1) = -1, y(-2) = -\sqrt{3}$;

iii) per $a = 1$ si determini la risposta impulsiva e la risposta forzata al segnale di ingresso $u(t) = 2^t\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\,\frac{(1+s)}{(s^2+100)(s+0.1)}.$$

i) Si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$ di tipo P, e quindi con la seguente struttura

$$C(s) = K_p,$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato di funzione di trasferimento $W(s)$ sia BIBO stabile e risponda, in evoluzione forzata e in condizioni di regime permanente, al gradino unitario $u(t) = \delta_{-1}(t)$ con il gradino $y_{rp}(t) = -\frac{1}{3}\delta_{-1}(t)$.

ii) Si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$ di tipo PD, e quindi con la seguente struttura

$$C(s) = K_p + K_d s,$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0, con errore di regime permanente (al gradino unitario) non superiore a $e^*_{rp} = 10^{-2}$, pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega^*_A = 100$ rad/sec e margine di fase almeno pari a 45^0.

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita a tempo continuo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \ldots + b_0 u(t), \qquad t \geq 0,$$

con $a_n \neq 0$, si derivi l'espressione dei modi elementari e dell'evoluzione libera del sistema e si derivi l'espressione della trasformata di Laplace dell'evoluzione libera in corrispondenza alle generiche condizioni iniziali $y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] Dall'equazione differenziale che descrive la dinamica del sistema è immediato derivare l'espressione della funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{1-s}{s(s^2+2s+4)}.$$

Dalla decomposizione di $G(s)$ nella forma

$$G(s) = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{s+6}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2} + \frac{5}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}\right]$$

segue immediatamente

$$g(t) = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{5}{4\sqrt{3}}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)\right]\delta_{-1}(t).$$

ii) [6 punti] Per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist andiamo a valutare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento in catena aperta

$$KG(s) = K\,\frac{1-s}{s(s^2+2s+4)}$$

per valori di K positivi e negativi. Da

$$KG(j\omega) = K\,\frac{1-j\omega}{j\omega(4-\omega^2+j2\omega)} = \frac{K(\omega^2-6)\omega + jK(3\omega^2-4)}{\omega[(4-\omega^2)^2+4\omega^2]}$$

segue

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \frac{K(\omega^2-6)}{[(4-\omega^2)^2+4\omega^2]} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{K(3\omega^2-4)}{\omega[(4-\omega^2)^2+4\omega^2]}.$$

Pertanto, posto $\bar{\omega}_1 := \sqrt{4/3}$ e $\bar{\omega}_2 := \sqrt{6}$, si ha per $K > 0$ e $\omega \geq 0$:

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1. \end{cases}$$

Invece, per $K < 0$, si ha

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_2$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{K}{2\sqrt{6}} = \begin{cases} > 0 & \text{se } K > 0; \\ < 0 & \text{se } K < 0. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_1$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = -\frac{3K}{8} = \begin{cases} < 0 & \text{se } K > 0; \\ > 0 & \text{se } K < 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = 0.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\}$ e $\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= -\frac{3K}{8} \\
\lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= -\mathrm{sgn}(K)\cdot\infty \\
\lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= \mathrm{sgn}(K)\cdot 0 \\
\lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= \mathrm{sgn}(K)\cdot 0.
\end{aligned}$$

Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\begin{aligned}
\arg KG(j\omega) &= \arg\left(\frac{K}{4}\,\frac{1-j\omega}{j\omega\left(1-\frac{\omega^2}{4}+j\frac{\omega}{2}\right)}\right) \\
&= \arg\left(\frac{K}{4}\cdot(1-j\omega)\right) - \arg\left(j\omega\left(1-\frac{\omega^2}{4}+j\frac{\omega}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0^+} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} -90^o & \text{se } K > 0; \\ 90^o & \text{se } K < 0; \end{cases} \\
\lim_{\omega\to +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} 0^o & \text{se } K > 0; \\ 180^o & \text{se } K < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che il comportamento per $\omega < 0$ si trova per simmetria, rovesciando la porzione di diagramma relativa a pulsazione non negative, il diagramma di Nyquist di $KG(j\omega)$ risulta, pertanto, illustrato per $K > 0$ in Figura 1 e per $K < 0$ in Figura 2 (si veda alla fine della soluzione). In entrambi i casi, abbiamo riportato il diagramma al finito facendo uso del percorso di Nyquist modificato.

Risulta allora evidente, dal primo diagramma, che

- per $-1 < -3K/8$ (ovvero $K < 8/3$), e chiaramente $K > 0$, $N = 0$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile;
- per $-1 > -3K/8$ (ovvero $K > 8/3$), $N = -2$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato è instabile;
- per $-1 = -3K/8$ (ovvero $K = 8/3$), si ha passaggio per il punto critico $-1 + j0$. Ciò ci permette di dire che $W(s)$ ha due poli a parte reale nulla (complessi coniugati) e pertanto il sistema retroazionato è instabile. Se adottiamo un percorso di Nyquist modificato, in modo da evitare il punto $-1 + j0$, ci rendiamo conto che $N = 0$ e quindi $W(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.

Nel caso del secondo diagramma, invece, è evidente che per ogni $K < 0$, $N = -1$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato è sempre instabile.

Esercizio 2. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è:

$$z^2 - a = 0.$$

Distinguiamo i seguenti casi:

- $a = 0$;
- $a > 0$;
- $a < 0$.

Se $a = 0$ gli zeri dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ pertanto i modi del sistema sono

$$\delta(t+2) \qquad \delta(t+1).$$

Se $a > 0$ gli zeri dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = \sqrt{a}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{a}$, pertanto i modi del sistema sono

$$\sqrt{a}^t \qquad (-\sqrt{a})^t.$$

Se $a < 0$ gli zeri dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = j\sqrt{-a}$ e $\lambda_2 = -j\sqrt{-a}$, pertanto i modi del sistema sono

$$(j\sqrt{-a})^t \qquad (-j\sqrt{-a})^t,$$

o, equivalentemente,

$$\sqrt{-a}^t \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \qquad \sqrt{-a}^t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

ii) [3 punti] Il sistema presenta modi di tipo sinusoidale se e solo se $a = -1$. Nel qual caso l'equazione caratteristica è del tipo $z^2 + 1 = 0$, ha radici $\pm j$ e quindi modi esponenziali

$$e^{jt\pi/2}, e^{-jt\pi/2},$$

o, equivalentemente, sinusoidali

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

L'evoluzione libera in corrispondenza alle generiche condizioni iniziali è

$$y_\ell(t) = c_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

Imponendo il rispetto delle condizioni iniziali si trova

$$\begin{aligned} -1 &= y_\ell(-1) = -c_1 \\ -\sqrt{3} &= y_\ell(-2) = -c_2. \end{aligned}$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right).$$

iii) [5 punti] Per $a = 1$, il sistema presenta i modi

$$1^t \qquad (-1)^t,$$

e l'equazione caratteristica diventa

$$y(t) - y(t-2) = u(t) + 2u(t-2), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

Pertanto $n = 2$, $m = 0$, e la risposta impulsiva è esprimibile nella forma

$$w(t) = d_0\delta(t) + d_1\delta(t-1) + d_2\delta(t-2) + [d_3 + d_4(-1)^t]\delta_{-1}(t-3).$$

Da una semplice riscrittura dell'equazione alle differenze del sistema in cui si sostituisca a $u(t)$ l'impulso $\delta(t)$ e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, segue immediatamente che

$$w(t) - w(t-2) = \delta(t) + 2\delta(t-2).$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} w(0) &= 1 \\ w(1) &= 0 \\ w(2) &= 3 \\ w(3) &= 0 \\ w(4) &= 3 \\ w(5) &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$d_0 = 1, d_2 = 3 \qquad d_1 = 0, d_3 = d_4 = \frac{3}{2}.$$

In altri termini,

$$w(t) = \delta(t) + 3\delta(t-2) + \frac{3}{2}\,(1 + (-1)^t)\,\delta_{-1}(t-3) = \delta(t) + \frac{3}{2}\,(1 + (-1)^t)\,\delta_{-1}(t-1).$$

In corrispondenza al segnale di ingresso assegnato, l'uscita in evoluzione forzata risulta, in virtù della linearità e tempo-invarianza del sistema,

$$y_f(t) = (\delta * u)(t) + \frac{3}{2}\,[y_1(t) + y_2(t)] = u(t) + \frac{3}{2}\,[y_1(t) + y_2(t)],$$

dove

$$y_1(t) = (\delta_{-1}(t-1) * u)(t)$$

e

$$y_2(t) = ((-1)^t\delta_{-1}(t-1) * u)(t) = -((-1)^{t-1}\delta_{-1}(t-1) * u)(t).$$

È immediato rendersi conto del fatto che

$$(\delta_{-1} * u)(t) = \begin{cases} 0, & \text{per } t < 0; \\ \sum_{\tau=0}^{t} 2^{\tau} = \dfrac{2^{t+1}-1}{2-1} = (2^{t+1}-1), & \text{per } t \geq 0, \end{cases}$$

ovvero

$$(\delta_{-1} * u)(t) = (2^{t+1}-1)\ \delta_{-1}(t),$$

e quindi

$$y_1(t) = (2^{t}-1)\ \delta_{-1}(t-1).$$

Analogamente

$$((-1)^t\delta_{-1} * u)(t) = \begin{cases} 0, & \text{per } t < 0, \\ \sum_{\tau=0}^{t}(-1)^{t-\tau}2^{\tau} = (-1)^t \frac{(-2)^{t+1}-1}{(-2)-1} & \\ = (-1)^t\ \dfrac{1-(-2)^{t+1}}{3}, & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

e quindi

$$y_2(t) = -(-1)^{t-1}\ \frac{1-(-2)^t}{3}\ \delta_{-1}(t-1) = (-1)^t\ \frac{1-(-2)^t}{3}\ \delta_{-1}(t-1).$$

Sommando le tre componenti dell'uscita si ottiene

$$y_f(t) = \delta(t) + \left[2^{t+1} - \frac{3-(-1)^t}{2}\right]\delta_{-1}(t-1).$$

Esercizio 3. i) [3 punti] In corrispondenza ad un controllore del tipo $C(s) = K_p$, la funzione di trasferimento del sistema retroazionato diventa

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{K_pG(s)}{1+K_pG(s)} = \frac{K_p10(s+1)}{(s^2+100)(s+0.1)+K_p10(s+1)} \\ &= \frac{K_p10(s+1)}{s^3+0.1s^2+(K_p10+100)s+(10+10K_p)}. \end{aligned}$$

Poichè la rappresentazione così ottenuta per la funzione di trasferimento del sistema in retroazione è coprima, tale sistema risulterà BIBO stabile se e solo se il polinomio al denominatore

$$d(s) = s^3 + 0.1s^2 + (K_p10+100)s + (10+10K_p)$$

è di Hurwitz. Applicando la tabella di Routh otteniamo

3	1	$10K_p + 100$
2	0.1	$10 + 10K_p$
1	$-90K_p$	0
0	$10 + 10K_p$	0

È immediato rendersi conto del fatto che la prima colonna della tabella ha tutti gli elementi di ugual segno (positivo) se e solo se $-1 < K_p < 0$. In tal caso il polinomio è di Hurwitz. In tutti gli altri casi, invece, ha almeno uno zero nel semipiano $\mathrm{Re}(s) \geq 0$. La funzione di trasferimento $W(s)$ soddisfa il vincolo posto sulla risposta di regime permanente al gradino se e solo se $W(0) = -1/3$. Imponendo il soddisfacimento di tale vincolo si trova

$$W(0) = \frac{10K_p}{10 + 10K_p} = -\frac{1}{3},$$

ovvero $K_p = -1/4$, valore compatibile con il range di valori per cui si ha BIBO stabilità.

ii) [4 punti] Riscriviamo preliminarmente la $G(s)$ in forma di Bode:

$$G(s) = \frac{1 + s}{(1 + 10s)(1 + 0.01s^2)}.$$

Da ciò si vede che il guadagno di Bode vale $K_B(G) = 1$. Il controllore, inoltre, può essere riscritto nella forma

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s\right),$$

e, pertanto, K_p rappresenta il guadagno di Bode del controllore. Pertanto, se vogliamo che il sistema retroazionato sia di tipo 0 con errore di regime permanente al più 10^{-2}, è sufficiente imporre

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_p} \leq 10^{-2},$$

ovvero

$$k_p \geq 10^2 - 1.$$

Scegliamo $K_p = 10^2$ e tracciamo il diagramma di Bode di $K_pG(s)$, ottenendo il diagramma di Bode illustrato in Figura 3.

La pulsazione di attraversamento in questo caso è $\omega_A = 10^{3/2}$ rad/s mentre il margine di fase alla pulsazione desiderata ω_A^* è circa 0^o. Se inseriamo uno zero in -10, ovvero poniamo $\frac{K_d}{K_p} = 0.1$, otteniamo il risultato desiderato sia dal punto di vista della pulsazione di attraversamento che dal punto di vista del margine di fase. Pertanto

$$C(s) = 10^2 + 10s.$$

Teoria. [4 punti] Si veda il libro di testo, Capitolo 2.