COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
17 Luglio 2003

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (2a+1)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (2a+a^2)\frac{dy(t)}{dt} + a^2y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2}, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \qquad (1)$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

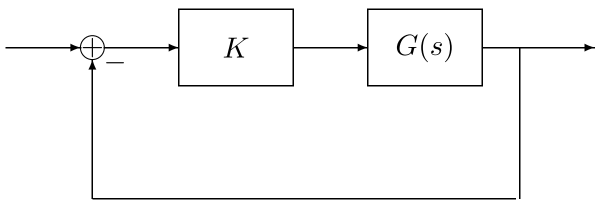
Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 1$

ii) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 0 \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = -1.$$

iii) Si determini la risposta impulsiva del sistema, $g(t)$.

iv) Detta $G(s)$ la funzione di trasferimento del sistema (1) (valutato per $a = 1$), si supponga di applicare al sistema un controllo in retroazione (unitaria negativa) sulla cui catena di azione diretta agisca un controllore proporzionale K come illustrato in figura:



Si studi al variare di $K \neq 0$ la stabilità BIBO del sistema retroazionato, evidenziando gli eventuali valori critici del parametro K, facendo uso della famiglia dei diagrammi di Nyquist di $KG(j\omega)$, $K \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Dato il modello ingresso/uscita a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$W(s) = 10\,\frac{(s-1)(s^2+2s+100)}{(5s+1)(s+10)^2},$$

i) si determinino i diagramma di Bode (asintotico e reale) di modulo e fase della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini, se esiste, la risposta di regime permanente del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = [\sin(0.01t) + \cos(100t + \pi/3)]\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 3. Si consideri il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s+100}.$$

Si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa unitaria) al più 0.1;

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 700$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 90^o.

Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.
[FACOLTATIVO: si dimostri il criterio di Nyquist assumendo per noto il criterio di Michailov].

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^3 + (2a+1)s^2 + (2a+a^2)s + a^2 = 0.$$

Il sistema risulta asintoticamente stabile se e solo se la precedente equazione caratteristica presenta tutte le radici nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$. Per verificare, al variare di a, se la precedente equazione ha tutte le radici a parte reale negativa oppure no è sufficiente costruire la corrispondente tabella di Routh. Si ottiene, allora,

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 2a+a^2 \\
2 & 2a+1 & a^2 \\
1 & \dfrac{2a(a+1)^2}{2a+1} & 0 \\
0 & a^2 & 0
\end{array}$$

Il polinomio $s^3 + (2a+1)s^2 + (2a+a^2)s + a^2$ ha radici tutte a parte reale negativa se e solo se la prima colonna della tabella di Routh ha tutti i coefficienti non nulli e di ugual segno (positivo). Ciò si verifica se e solo se $a > 0$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, chiaramente il sistema risulta BIBO stabile per i medesimi valori di a per cui esso è asintoticamente stabile. La situazione in cui il sistema risulti BIBO stabile senza essere asintoticamente stabile può verificarsi se e solo se per qualche valore di a la funzione di trasferimento del sistema ha tutti i poli a parte reale negativa, nonostante il polinomio $s^3 + (2a+1)s^2 + (2a+a^2)s + a^2$ non sia di Hurwitz. La funzione di trasferimento del sistema è

$$G(s) = \frac{s^2}{s^3 + (2a+1)s^2 + (2a+a^2)s + a^2}$$

e la situazione precedentemente delineata, alla luce del fatto che il polinomio al numeratore ha uno zero di molteplicità 2 in 0, si può verificare solo se $s^3 + (2a+1)s^2 + (2a+a^2)s + a^2$ ha uno o due zeri in 0 e tutti gli altri a parte reale negativa. È immediato rendersi conto che ciò si verifica se e solo se $a = 0$. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se

$$a \geq 0.$$

ii) [3 punti] Per $a = 1$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = (s+1)^3$$

e, pertanto il sistema presenta tre modi associati alla radice -1 di molteplicità 3, ovvero:

$$e^{-t}, t \cdot e^{-t}, \frac{t^2}{2} \cdot e^{-t}.$$

L'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 \frac{t^2}{2} \cdot e^{-t} = (c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2}) e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{array}{rcccccl} 1 = & y(0^-) & = & y_\ell(0^-) & = & c_1, \\ 0 = & \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = & \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = & -c_1 + c_2, \\ -1 = & \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} & = & \left.\frac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} & = & c_3 + c_1 - 2c_2, \end{array}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad c_3 = 0.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = e^{-t} + t e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

iii) [2 punti] Calcoliamo la risposta impulsiva come antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento del sistema. Per $a = 1$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$G(s) = \frac{s^2}{(s+1)^3}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $G(s)$ porta a

$$G(s) = \frac{s^2}{(s+1)^3} = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s+1)^3} - \frac{2s+1}{(s+1)^3} = \frac{1}{s+1} - 2\frac{s+1}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^3}.$$

Pertanto l'antitrasformata di $G(s)$ è

$$g(t) = \left[e^{-t} - 2te^{-t} + \frac{t^2}{2}\, e^{-t} \right] \delta_{-1}(t).$$

iv) [5 punti] Per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist andiamo a valutare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento in catena aperta

$$KG(s) = K\, \frac{s^2}{(s+1)^3}$$

per valori di K positivi e negativi. Da

$$K \cdot G(j\omega) = \frac{-\omega^2}{(1+j\omega)^3} = \frac{-\omega^2(1-j\omega)^3}{(1+\omega^2)^3} = K \frac{\omega^2(3\omega^2 - 1) + j\omega^3(3-\omega^2)}{(1+\omega^2)^3},$$

segue

$$\mathrm{Re}\{K \cdot G(j\omega)\} = K\, \frac{\omega^2(3\omega^2-1)}{(1+\omega^2)^3} \qquad \mathrm{Im}\{K \cdot G(j\omega)\} = K\, \frac{\omega^3(3-\omega^2)}{(1+\omega^2)^3}.$$

Pertanto, posto $\bar{\omega}_1 := \sqrt{1/3}$ e $\bar{\omega}_2 := \sqrt{3}$, si ha per $K > 0$ e $\omega \geq 0$:

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2. \end{cases}$$

Invece, per $K < 0$, si ha

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_1$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{K\sqrt{3}}{8} = \begin{cases} > 0 & \text{se } K > 0; \\ < 0 & \text{se } K < 0. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_2$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \frac{3K}{8} = \begin{cases} > 0 & \text{se } K > 0; \\ < 0 & \text{se } K < 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = 0.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\}$ e $\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

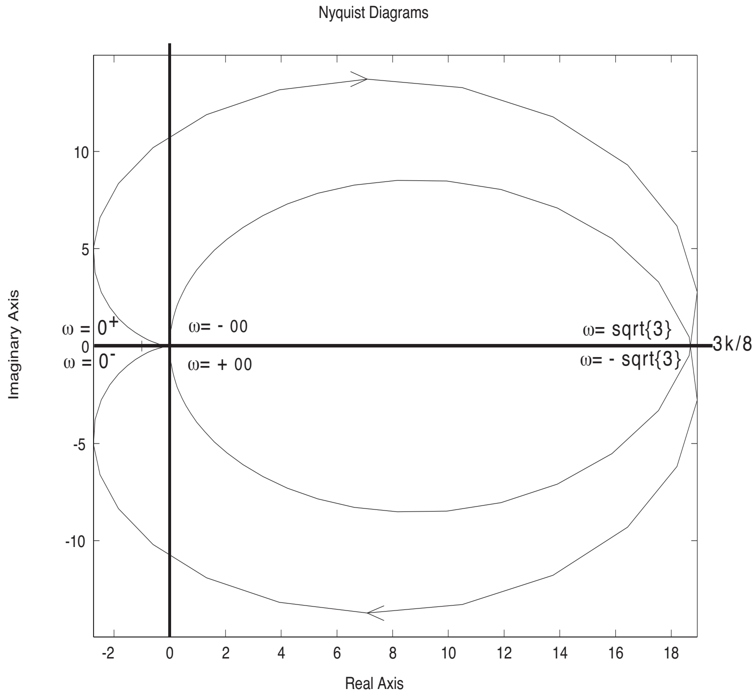
Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\begin{aligned} \arg KG(j\omega) &= \arg\left(K \, \frac{-\omega^2}{(1+j\omega)^3}\right) \\ &= \arg K - 180^o - 3\arg(1+j\omega). \end{aligned}$$

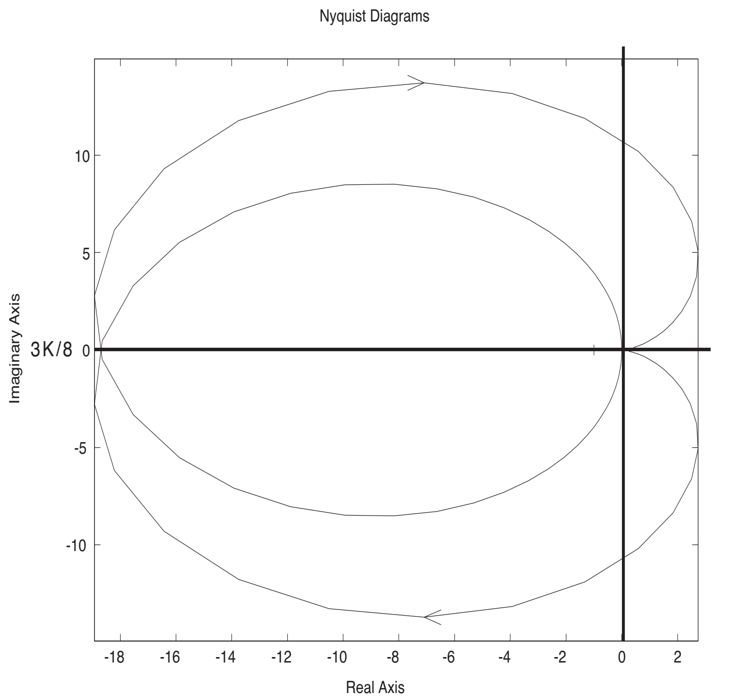
Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to 0^+} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} 180^o & \text{se } K > 0; \\ 0^o & \text{se } K < 0; \end{cases} \\ \lim_{\omega\to +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} -90^o & \text{se } K > 0; \\ 90^o & \text{se } K < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che il comportamento per $\omega < 0$ si trova per simmetria, rovesciando la porzione di diagramma relativa a pulsazione non negative, il diagramma di Nyquist di $KG(j\omega)$ risulta, pertanto, illustrato per $K > 0$ in Figura 1



e per $K < 0$ in Figura 2.



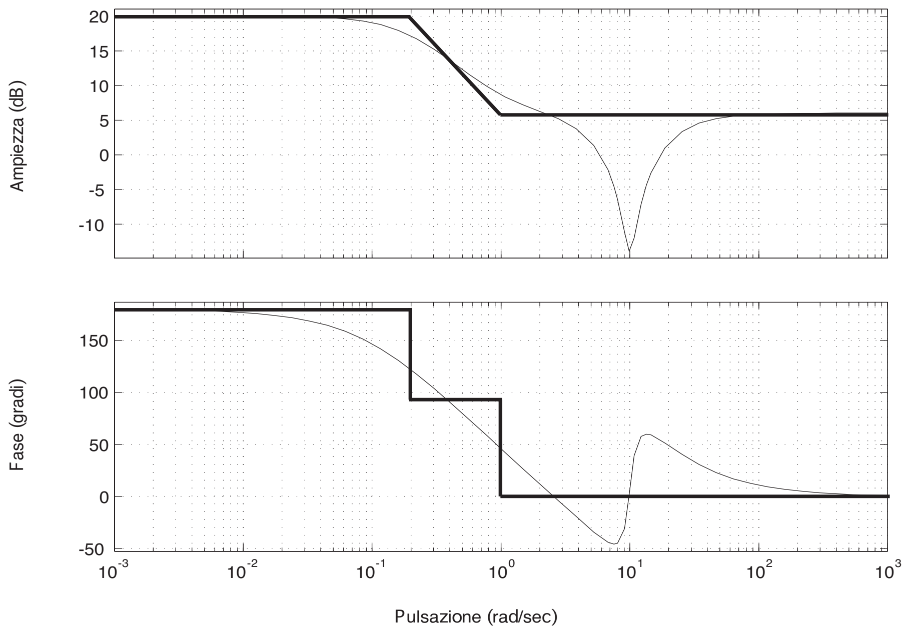
Risulta allora evidente, dal primo diagramma, che il sistema è BIBO stabile per ogni valore di $K > 0$. Nel caso del secondo diagramma, invece, è evidente che

- per $-1 < 3K/8$ (ovvero $K > -8/3$), e chiaramente $K > 0$, $N = 0$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile;
- per $-1 > 3K/8$ (ovvero $K < -8/3$), $N = -2$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato è instabile;
- per $-1 = 3K/8$ (ovvero $K = -8/3$), si ha passaggio per il punto critico $-1 + j0$. Ciò ci permette di dire che $W(s)$ ha due poli a parte reale nulla (complessi coniugati) e pertanto il sistema retroazionato è instabile. Se adottiamo un percorso di Nyquist modificato, in modo da evitare il punto $-1 + j0$, ci rendiamo conto che $N = 0$ e quindi $W(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.

Esercizio 2. i) [5 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$W(s) = -10 \frac{(1-s)\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{10}\frac{s}{10} + \frac{s^2}{10^2}\right)}{((1 + \frac{s}{0.2})\,(1 + 0.1s)^2}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento ha guadagno di Bode -10 (ovvero $|K_B|_{\text{dB}} = 20$ dB e $\arg(K_B) = 180^o$). I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi presentano inoltre tre punti di spezzamento: uno corrispondente ad un polo reale negativo in -0.2, uno corrispondente ad uno zero reale positivo in 1 ed uno corrispondente sia ad una coppia di poli complessi coniugati, collocati in $-1 \pm j\sqrt{99}$ (ovvero un termine trinomio con pulsazione naturale $\omega_n = 10$ rad/sec e coefficiente di smorzamento $\xi = 0.1$), sia ad un polo reale doppio negativo in -10. Per tracciare il diagramma reale bisogna tener conto del fatto che la presenza di due termini distinti in corrispondenza alla pulsazione di taglio 10 rad/s, di cui uno poco smorzato e l'altro smorzato (perchè reale di molteplicità 2) produce due termini che pur compensandosi a regime sia in fase che in ampiezza generano dei picchi in corrispondenza alla pulsazione di taglio. Il risultato è illustrato in figura.



ii) [3 punti] È immediato rendersi conto del fatto che il sistema è BIBO stabile e quindi esiste la risposta di regime permanente al"ingresso dato, a partire da condizioni iniziali nulle. È inoltre facile rendersi conto del fatto che le pulsazioni $\omega = 0.01$ e $\omega = 100$ dei due segnali sinusoidali di ingresso si trovano in zone del diagramma di Bode in cui ampiezza e fase sono assestati, con buona approssimazione, su valori costanti. Dal diagramma di Bode possiamo verificare con buona approssimazione che

$$|W(j0.01)| = 10 \text{ (20 dB)} \quad \arg W(j0.01) = 180^o$$

$$|W(j100)| = 2 \text{ (6 dB)} \quad \arg W(j100) = 0^o.$$

Pertanto la risposta di regime permanente in corrispondenza al segnale

$$u(t) = \left[\sin(0.01t) + \cos\left(100t + \frac{\pi}{3}\right)\right]\delta_{-1}(t)$$

è

$$\begin{aligned} y_{rp}(t) &= \left[10\sin(0.01t + \pi) + 2\cos\left(100t + \frac{\pi}{3}\right)\right]\delta_{-1}(t) \\ &= \left[-10\sin(0.01t) + 2\cos\left(100t + \frac{\pi}{3}\right)\right]\delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

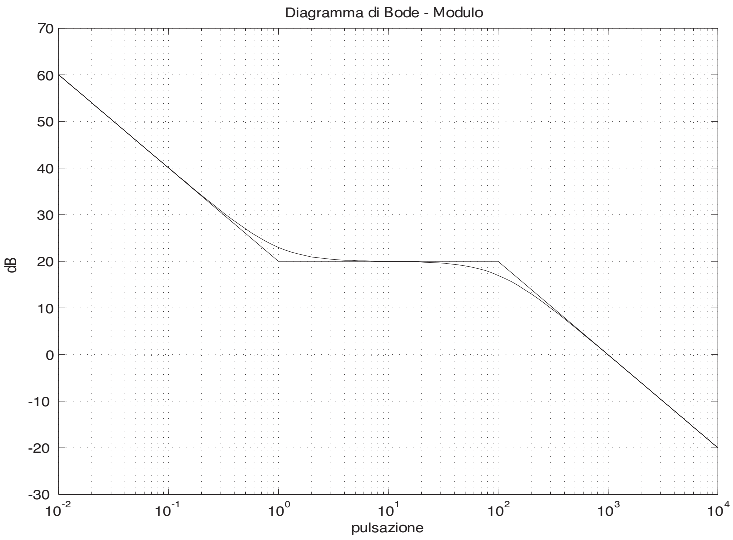
Esercizio 3. [4 punti] Poichè viene richiesto che il tipo del sistema sia 1 è sufficiente introdurre un polo semplice nell'origine attraverso il controllore. Provvediamo, ora, ad attribuire al guadagno di Bode del controllore un valore che assicuri il rispetto del vincolo sull'errore di regime permanente. Poichè è noto che l'errore di regime permanente di un sistema di tipo 1 è espresso dalla formula

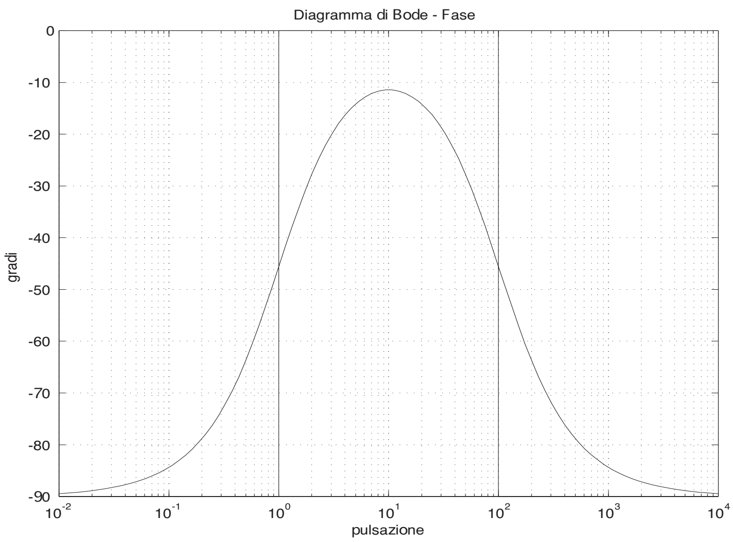
$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)K_B(G)},$$

dove $K_B(C)$ e $K_B(G)$ rappresentano, rispettivamente, il guadagno di Bode del controllore e del processo, il vincolo su $K_B(C)$ diventa

$$\frac{1}{K_B(C)K_B(G)} = \frac{100}{K_B(C)} \leq 0.1.$$

Da ciò segue $K_B(C) \geq 1000$. Scegliamo allora, preliminarmente, $C'(s) = \frac{K_B(C)}{s} = \frac{1000}{s}$ e andiamo a valutare pulsazione di attraversamento e margine di fase per la funzione di trasferimento in catena aperta $C'(s)G(s) = 10\ \frac{1+s}{s(1+0.01s)}$. Graficamente si trova





ed è immediato rendersi conto del fatto che la pulsazione ω_A si trova esattamente in corrispondenza a 10^3 rad/s, mentre il margine di fase in corrispondenza alla pulsazione $\omega_A^* = 700$ rad/sec è circa 90^o. Per compensare il fatto che $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) \approx m_\psi^* := 90^o$ potremmo utilizzare un'azione attenuatrice:

$$C_{\rm att}(s) = \frac{1 + s\alpha T}{1 + sT}.$$

Tuttavia è immediato trovare una soluzione ad occhio. Volendo infatti preservare un margine di fase pari, almeno, a 90^o, una soluzione intuitiva consiste nel cancellare il polo in -100 e sostituirlo con un polo (reale negativo) che permetta l'esatto attraversamento dell'asse delle ascisse alla pulsazione desiderata. In tal modo il margine di fase è certamente pari ad almeno 90^o. È immediato rendersi conto che, dal momento che in tale situazione il diagramma (asintotico) delle ampiezze scende con pendenza di -20 dB/decade, la corretta collocazione dello zero è esattamente una decade prima della pulsazione di attraversamento desiderata, ovvero a -70. Si trova, pertanto,

$$C_{\rm att}(s) = \frac{1 + \frac{s}{100}}{1 + \frac{s}{70}}$$

e quindi

$$C(s) = \frac{K_B(C)}{s}\, C_{\rm att}(s) = 1000\, \frac{1 + \frac{s}{100}}{s\left(1 + \frac{s}{70}\right)}.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 160 e successive. Per la parte facoltativa [2 punti] si vedano gli appunti delle lezioni.