# I COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
# TEMI A1/A2 - A.A. 2003/2004

**Esercizio 1.** Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1+2a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (2+5a)\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - u(t),$$

dove $a$ è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di $a$ in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$:

ii) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 3, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = -2;$$

iii) si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t), t \in \mathbb{R}$;

iv) si determini la risposta (forzata) del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = [1 - e^{-t}]\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** Sia

$$W(s) = \frac{s(s-1000)}{(s+10)(s+100)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $W(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) si dica se esiste la risposta (forzata) di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = \cos(0.1t)\delta_{-1}(t)$$

e, in caso affermativo, la si calcoli almeno approssimativamente.

[Suggerimento: si sfrutti l'informazione approssimativa fornita dai diagrammi di Bode valutati al punto precedente].

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = as^3 + (1+2a)s^2 + (2+5a)s + 5.$$

Analizziamo separatamente il caso $a = 0$, in corrispondenza al quale il coefficiente del termine di grado 3 nell'equazione caratteristica è nullo e quindi l'equazione caratteristica ha grado 2. Questa situazione risulta accettabile dal momento che il sistema continua a rimanere proprio. Per $a = 0$ si trova

$$0 = s^2 + 2s + 5$$

che, in base alla regola dei segni di Cartesio, è chiaramente un polinomio di Hurwitz. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile giacché le sue radici sono tutte nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$. Per $a \neq 0$ l'equazione caratteristica coinvolge un polinomio di grado 3 e pertanto possiamo valutare per quali valori di $a$ essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s)$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \text{a} & 2 + 5\text{a} \\
2 & 1+2a & 5 \\
1 & \dfrac{10a^2+4a+2}{1+2a} & 0 \\
0 & 5 & 0
\end{array}$$

Poichè l'ultimo elemento in prima colonna è positivo, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} a > 0 \\ 1+2a > 0 \\ \dfrac{10a^2+4a+2}{1+2a} > 0 \end{cases}$$

È immediato rendersi conto del fatto che nel momento in cui la prima condizione è soddisfatta lo sono anche le altre due. Pertanto (per $a \neq 0$) i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh sono tutti positivi se e solo se $a > 0$. Riassumendo, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$a \geq 0.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro $a$ per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro $a$ in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{as^3 + (1+2a)s^2 + (2+5a)s + 5}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 1, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro $a$ il polinomio al denominatore ha uno zero in 1 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 1 se e solo se

$$0 = as^3 + (1+2a)s^2 + (2+5a)s + 5\Big|_{s=1} = a + (1+2a) + (2+5a) + 5 = 8 + 8a.$$

La precedente equazione di primo grado nell'indeterminata $a$ ha soluzione $a = -1$. Per tale valore di $a$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{-s^3 - s^2 - 3s + 5} = -\frac{s+1}{s^2 + 2s + 5}$$

e quindi, per la regola dei segni di Cartesio, essa ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in \{-1\} \cup [0, +\infty)$.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 2^2 = (s + 1 - j2)(s + 1 + j2)$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\sin(2t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} 3 = &\quad y(0^-) &= &\quad y_\ell(0^-) &= &\ c_1, \\ -2 = &\quad \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0^-} &= &\quad \frac{dy_\ell(t)}{dt}\Big|_{t=0^-} &= &\ -c_1 + 2c_2, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 3 \qquad \text{e} \qquad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = 3e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

iii) [2.5 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{s^2-1}{s^2+2s+5} = \frac{s^2+2s+5-2s-6}{s^2+2s+5} = 1-2\frac{s+3}{(s+1)^2+2^2} \\ &= 1-2\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - 2\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \end{aligned}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$w(t) = \delta(t) - [2e^{-t}\cos(2t) + 2e^{-t}\sin(2t)]\delta_{-1}(t).$$

iv) [3 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso $u(t) = [1-e^{-t}]\delta_{-1}(t)$ è

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

La trasformata di Laplace della corrispondente evoluzione forzata è data da

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{s^2+2s+5}\cdot\frac{1}{s(s+1)} = \frac{s-1}{s[(s+1)^2+2^2]}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$Y_f(s) = -\frac{1}{5}\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\frac{s+7}{(s+1)^2+2^2} = -\frac{1}{5}\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{3}{5}\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

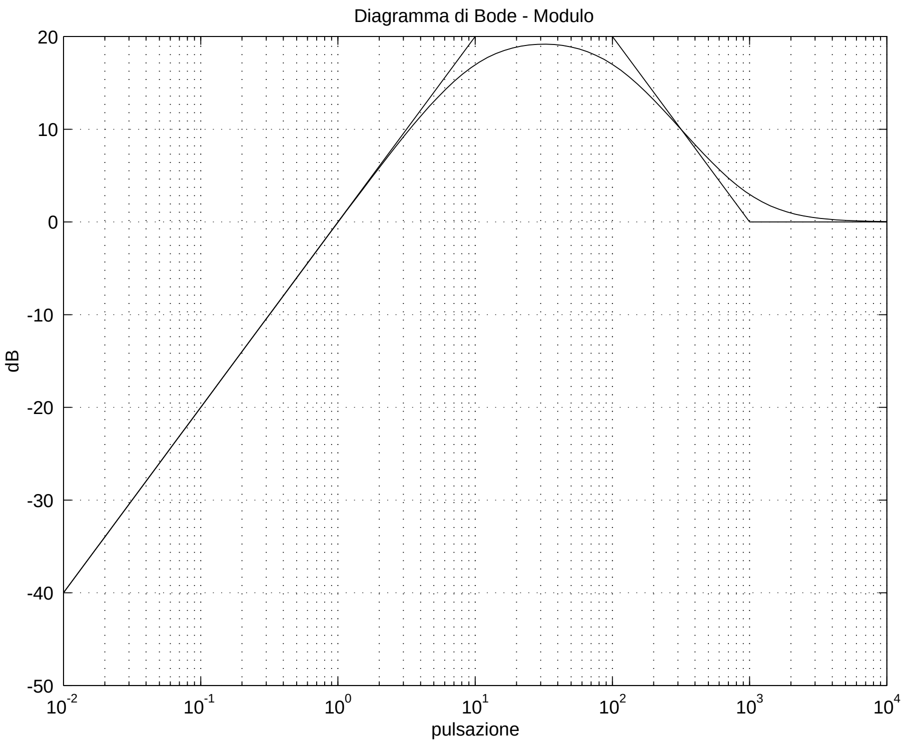
a cui corrisponde l'antitrasformata

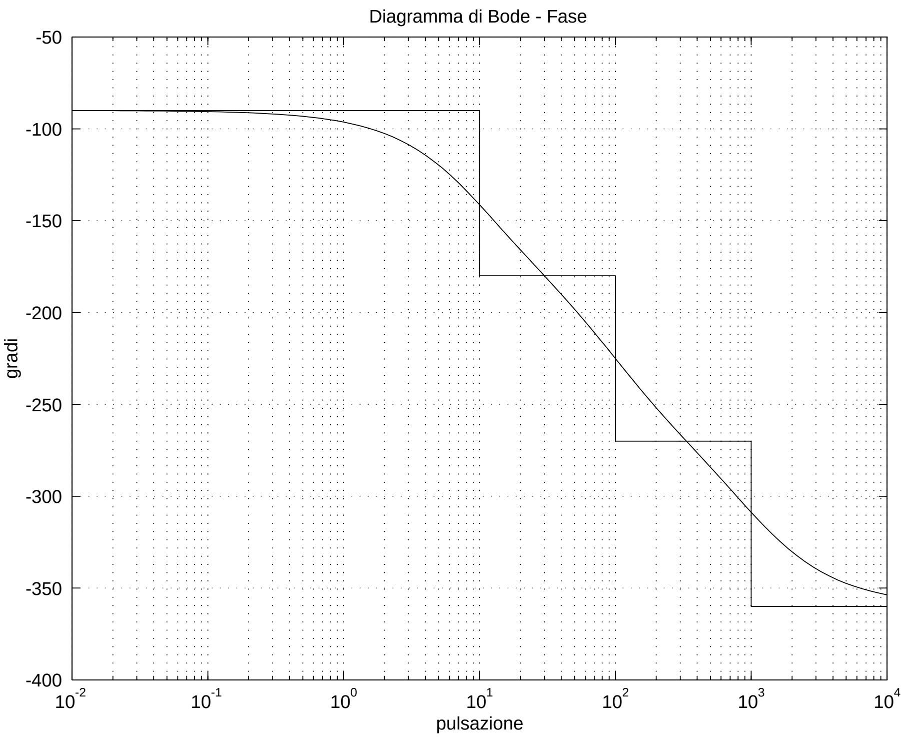
$$y_f(t) = \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}e^{-t}\cos(2t) + \frac{3}{5}e^{-t}\sin(2t)\right)\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$W(s) = \frac{s(s-1000)}{(s+10)(s+100)} = -\frac{s(1-10^{-3}s)}{(1+10^{-1}s)(1+10^{-2}s)}$$

Pertanto $K_B = -1$ e la risposta in frequenza presenta uno zero semplice nell'origine ($\nu = -1$), uno zero reale positivo con $1/T' = -1000$ e $\mu' = 2$, un polo reale negativo con $1/T_1 = 10$ e $\mu_1 = 1$, e, infine, un secondo polo reale negativo con $1/T_2 = 100$ e $\mu_2 = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.




ii) [2.5 punti] Il sistema è BIBO stabile quindi la risposta di regime permanente al segnale

assegnato esiste ed è espressa nella forma

$$y_{rp}(t) = |W(j0.1)| \cos(0.1t + \arg(W(j0.1)))\delta_{-1}(t).$$

I valori di $|W(j0.1)|$ e $\arg(W(j0.1))$ possono essere desunti da una semplice ispezione dei diagrammi di Bode. Si vede subito, infatti, che $|W(j0.1)| \approx -20\text{dB} = 0.1$ e $\arg(W(j0.1)) \approx -90^o = -\frac{\pi}{2}$ rad. Pertanto

$$y_{rp}(t) = 0.1 \cos\left(0.1t - \frac{\pi}{2}\right)\delta_{-1}(t).$$

**Test A1.** [10 punti] 1A  2 A  3 B  4 A  5 C.

**Test A2.** [10 punti] 1C  2 B  3 B  4 A  5 B.

# I COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
# TEMI B1/B2 - A.A. 2003/2004

**Esercizio 1.** Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1+4a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (4+5a)\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - u(t),$$

dove $a$ è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di $a$ in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$:

ii) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = -2;$$

iii) si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t), t \in \mathbb{R}$;

iv) si determini la risposta (forzata) del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = [1 - e^{-t}]\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** Sia

$$W(s) = \frac{s(s-100)}{(s+10)(s+1)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $W(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) si dica se esiste la risposta (forzata) di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = \cos(0.01t)\delta_{-1}(t)$$

e, in caso affermativo, la si calcoli almeno approssimativamente.

[Suggerimento: si sfrutti l'informazione approssimativa fornita dai diagrammi di Bode valutati al punto precedente].

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = as^3 + (1 + 4a)s^2 + (4 + 5a)s + 5.$$

Analizziamo separatamente il caso $a = 0$, in corrispondenza al quale il coefficiente del termine di grado 3 nell'equazione caratteristica è nullo e quindi l'equazione caratteristica ha grado 2. Questa situazione risulta accettabile dal momento che il sistema continua a rimanere proprio. Per $a = 0$ si trova

$$0 = s^2 + 4s + 5$$

che, in base alla regola dei segni di Cartesio, è chiaramente un polinomio di Hurwitz. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile giacché le sue radici sono tutte nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$. Per $a \neq 0$ l'equazione caratteristica coinvolge un polinomio di grado 3 e pertanto possiamo valutare per quali valori di $a$ essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s)$ è:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & \text{a} & 4 + 5\text{a} \\ 2 & 1 + 4a & 5 \\ 1 & \dfrac{20a^2 + 16a + 4}{1 + 4a} & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}$$

Poichè l'ultimo elemento in prima colonna è positivo, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} a > 0 \\ 1 + 4a > 0 \\ \dfrac{20a^2 + 16a + 4}{1 + 4a} > 0 \end{cases}$$

È immediato rendersi conto del fatto che nel momento in cui la prima condizione è soddisfatta lo sono anche le altre due. Pertanto (per $a \neq 0$) i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh sono tutti positivi se e solo se $a > 0$. Riassumendo, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$a \geq 0.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro $a$ per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro $a$ in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{as^3 + (1 + 4a)s^2 + (4 + 5a)s + 5}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 1, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro $a$ il polinomio al denominatore ha uno zero in 1 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 1 se e solo se

$$0 = as^3 + (1 + 4a)s^2 + (4 + 5a)s + 5\Big|_{s=1} = a + (1 + 4a) + (4 + 5a) + 5 = 10 + 10a.$$

La precedente equazione di primo grado nell'indeterminata $a$ ha soluzione $a = -1$. Per tale valore di $a$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{-s^3 - 3s^2 - s + 5} = -\frac{s + 1}{s^2 + 4s + 5}$$

e quindi, per la regola dei segni di Cartesio, essa ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in \{-1\} \cup [0, +\infty)$.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^2 + 4s + 5 = (s + 2)^2 + 1^2 = (s + 2 - j)(s + 1 + j)$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-2t} \cos(t) + c_2 e^{-2t} \sin(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} 1 = \quad & y(0^-) & = \quad & y_\ell(0^-) & = \quad & c_1, \\ -2 = \quad & \tfrac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0^-} & = \quad & \tfrac{dy_\ell(t)}{dt}\Big|_{t=0^-} & = \quad & -2c_1 + c_2, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad c_2 = 0.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = e^{-2t} \cos(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

iii) [2.5 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{s^2-1}{s^2+4s+5} = \frac{s^2+4s+5-4s-6}{s^2+4s+5} = 1 - 4\frac{s+\frac{3}{2}}{(s+2)^2+1^2} \\ &= 1 - 4\frac{s+2}{(s+2)^2+1^2} + 2\frac{1}{(s+2)^2+1^2} \end{aligned}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$w(t) = \delta(t) - [4e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-2t}\sin(t)]\delta_{-1}(t).$$

iv) [3 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso $u(t) = [1 - e^{-t}]\delta_{-1}(t)$ è

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

La trasformata di Laplace della corrispondente evoluzione forzata è data da

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{s^2+4s+5} \cdot \frac{1}{s(s+1)} = \frac{s-1}{s[(s+2)^2+1^2]}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$Y_f(s) = -\frac{1}{5}\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\frac{s+9}{(s+2)^2+1^2} = -\frac{1}{5}\frac{1}{s} + \frac{1}{5}\frac{s+2}{(s+2)^2+1^2} + \frac{7}{5}\frac{1}{(s+2)^2+1^2}$$

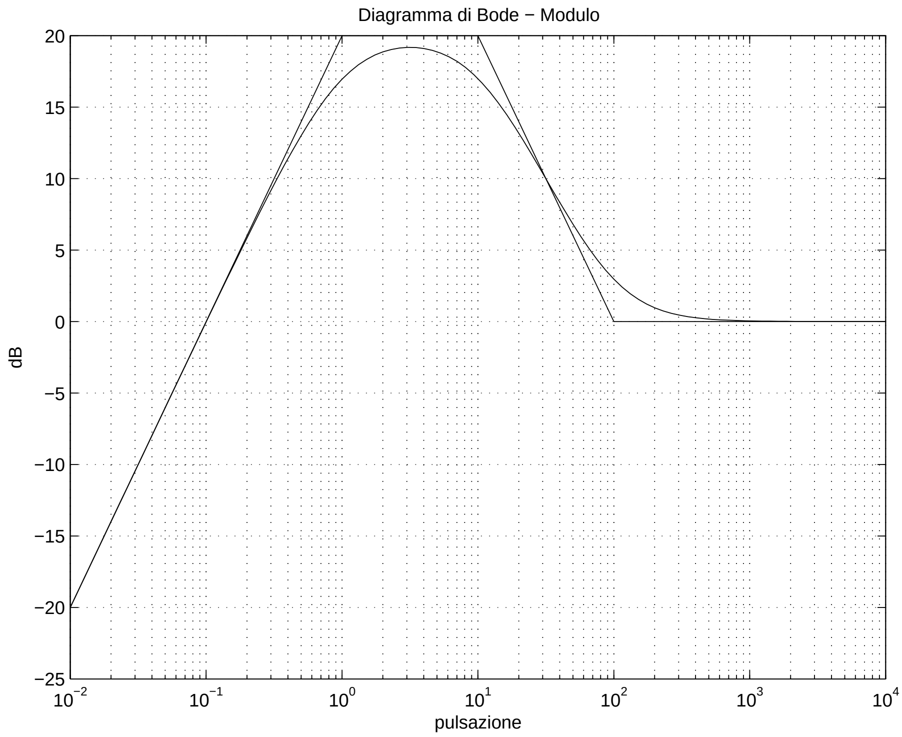
a cui corrisponde l'antitrasformata

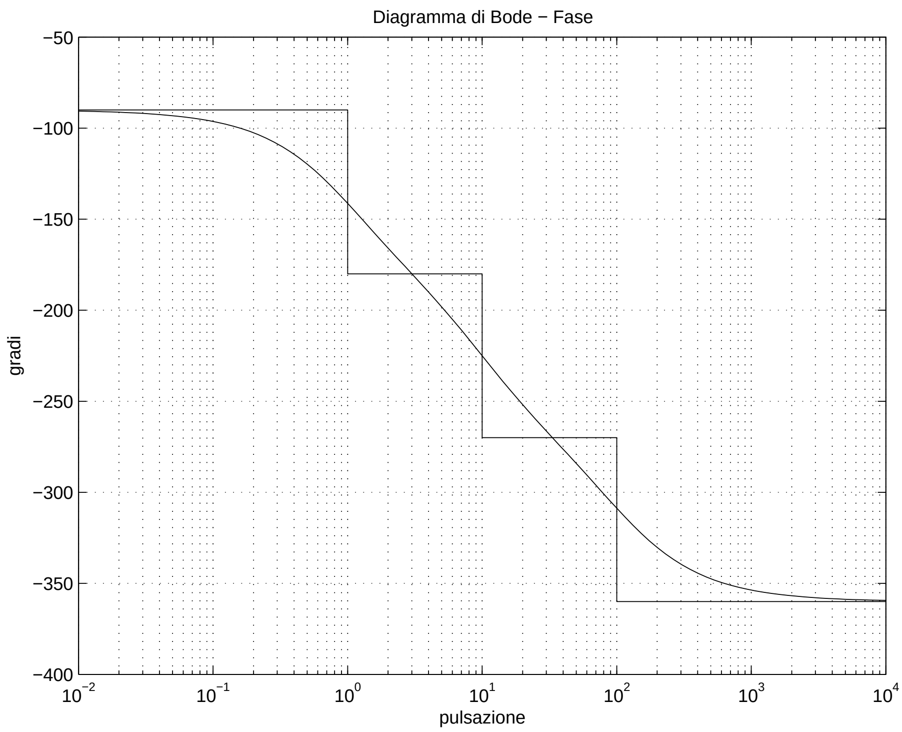
$$y_f(t) = \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}e^{-2t}\cos(t) + \frac{7}{5}e^{-2t}\sin(t)\right)\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$W(s) = \frac{s(s-100)}{(s+10)(s+1)} = -10\frac{s(1-10^{-2}s)}{(1+10^{-1}s)(1+s)}$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta uno zero semplice nell'origine ($\nu = -1$), uno zero reale positivo con $1/T' = -100$ e $\mu' = 2$, un polo reale negativo con $1/T_1 = 10$ e $\mu_1 = 1$, e, infine, un secondo polo reale negativo con $1/T_2 = 1$ e $\mu_2 = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.




ii) [2.5 punti] Il sistema è BIBO stabile quindi la risposta di regime permanente al segnale

assegnato esiste ed è espressa nella forma

$$y_{rp}(t) = |W(j0.01)| \cos(0.01t + \arg(W(j0.01)))\delta_{-1}(t).$$

I valori di $|W(j0.01)|$ e $\arg(W(j0.01))$ possono essere desunti da una semplice ispezione dei diagrammi di Bode. Si vede subito, infatti, che $|W(j0.01)| \approx -20\text{dB} = 0.1$ e $\arg(W(j0.1)) \approx -90^o = -\frac{\pi}{2}$ rad. Pertanto

$$y_{rp}(t) = 0.1 \cos\left(0.01t - \frac{\pi}{2}\right)\delta_{-1}(t).$$

**Test B1.** [10 punti] 1 C 2 C 3 B 4C 5 B.

**Test B2.** [10 punti] 1 C 2 C 3 A 4 A 5 A.

# I COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
# TEMI C1/C2 - A.A. 2003/2004

**Esercizio 1.** Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1+a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(1+\frac{1}{2}a\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{2}y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - u(t),$$

dove $a$ è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di $a$ in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$:

ii) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 2, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 1;$$

iii) si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t), t \in \mathbb{R}$;

iv) si determini la risposta (forzata) del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = [1 - e^{-t}]\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** Sia

$$W(s) = \frac{s(s-100)}{(s+10)(s+1000)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $W(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) si dica se esiste la risposta (forzata) di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = \cos(10^5 t)\delta_{-1}(t)$$

e, in caso affermativo, la si calcoli almeno approssimativamente.

[Suggerimento: si sfrutti l'informazione approssimativa fornita dai diagrammi di Bode valutati al punto precedente].

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = as^3 + (1+a)s^2 + \left(1 + \frac{1}{2}a\right) s + \frac{1}{2}.$$

Analizziamo separatamente il caso $a = 0$, in corrispondenza al quale il coefficiente del termine di grado 3 nell'equazione caratteristica è nullo e quindi l'equazione caratteristica ha grado 2. Questa situazione risulta accettabile dal momento che il sistema continua a rimanere proprio. Per $a = 0$ si trova

$$0 = s^2 + s + \frac{1}{2}$$

che, in base alla regola dei segni di Cartesio, è chiaramente un polinomio di Hurwitz. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile giacché le sue radici sono tutte nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$. Per $a \neq 0$ l'equazione caratteristica coinvolge un polinomio di grado 3 e pertanto possiamo valutare per quali valori di $a$ essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s)$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \text{a} & 1 + \frac{a}{2} \\[2ex]
2 & 1 + a & \frac{1}{2} \\[2ex]
1 & \dfrac{\frac{a^2}{2} + a + 1}{1 + a} & 0 \\[2ex]
0 & \frac{1}{2} & 0
\end{array}$$

Poichè l'ultimo elemento in prima colonna è positivo, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} a > 0 \\[2ex] 1 + a > 0 \\[2ex] \dfrac{\frac{a^2}{2} + a + 1}{1 + a} > 0 \end{cases}$$

È immediato rendersi conto del fatto che nel momento in cui la prima condizione è soddisfatta lo sono anche le altre due. Pertanto (per $a \neq 0$) i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh sono tutti positivi se e solo se $a > 0$. Riassumendo, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$a \geq 0.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro $a$ per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro $a$ in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{as^3 + (1+a)s^2 + \left(1 + \frac{1}{2}a\right)s + \frac{1}{2}}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 1, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro $a$ il polinomio al denominatore ha uno zero in 1 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 1 se e solo se

$$0 = as^3 + (1+a)s^2 + \left(1 + \frac{1}{2}a\right)s + \frac{1}{2}\bigg|_{s=1} = a + (1+a) + \left(1 + \frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}a.$$

La precedente equazione di primo grado nell'indeterminata $a$ ha soluzione $a = -1$. Per tale valore di $a$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{-s^3 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}} = -\frac{s+1}{s^2 + s + \frac{1}{2}}$$

e quindi, per la regola dei segni di Cartesio, essa ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in \{-1\} \cup [0, +\infty)$.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^2 + s + \frac{1}{2} = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(s + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)\left(s + \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} 2 = \quad & y(0^-) & = \quad & y_\ell(0^-) & = \quad & c_1, \\ 1 = \quad & \frac{dy(t)}{dt}\bigg|_{t=0^-} & = \quad & \frac{dy_\ell(t)}{dt}\bigg|_{t=0^-} & = \quad & -\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2}, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad c_2 = 4.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

iii) [2.5 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{s^2-1}{s^2+s+\frac{1}{2}} = \frac{s^2+s+\frac{1}{2}-s-\frac{3}{2}}{s^2+s+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{s+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= 1 - \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} - 2\frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$w(t) = \delta(t) - \left[e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]\delta_{-1}(t).$$

iv) [3 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso $u(t) = [1-e^{-t}]\delta_{-1}(t)$ è

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

La trasformata di Laplace della corrispondente evoluzione forzata è data da

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{s^2+s+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{s(s+1)} = \frac{s-1}{s\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$Y_f(s) = -2\frac{1}{s} + \frac{2s+3}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -2\frac{1}{s} + 2\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + 4\frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

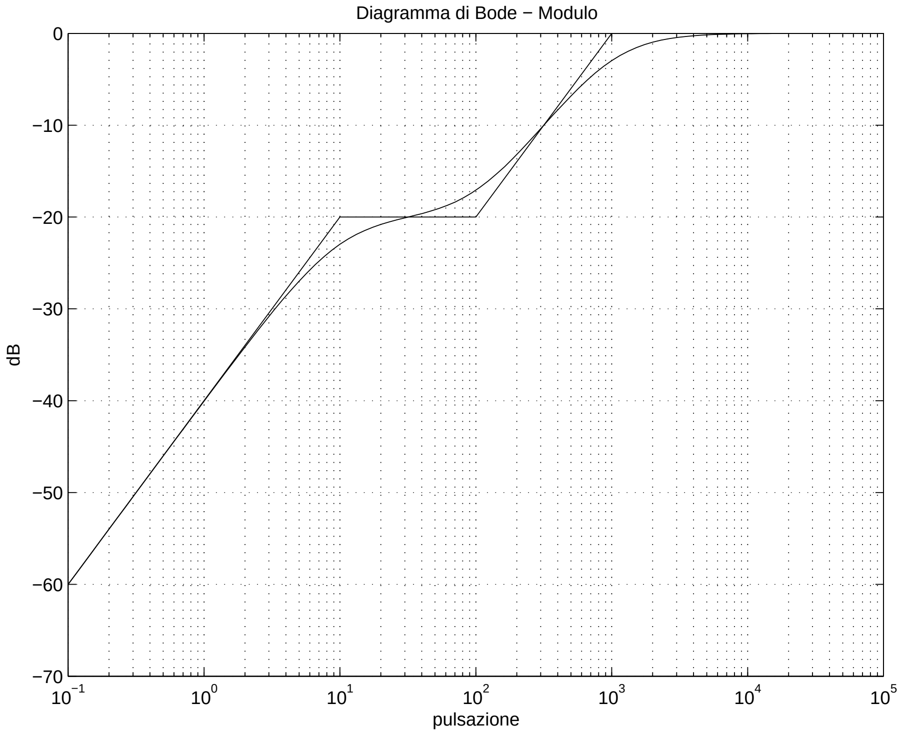
a cui corrisponde l'antitrasformata

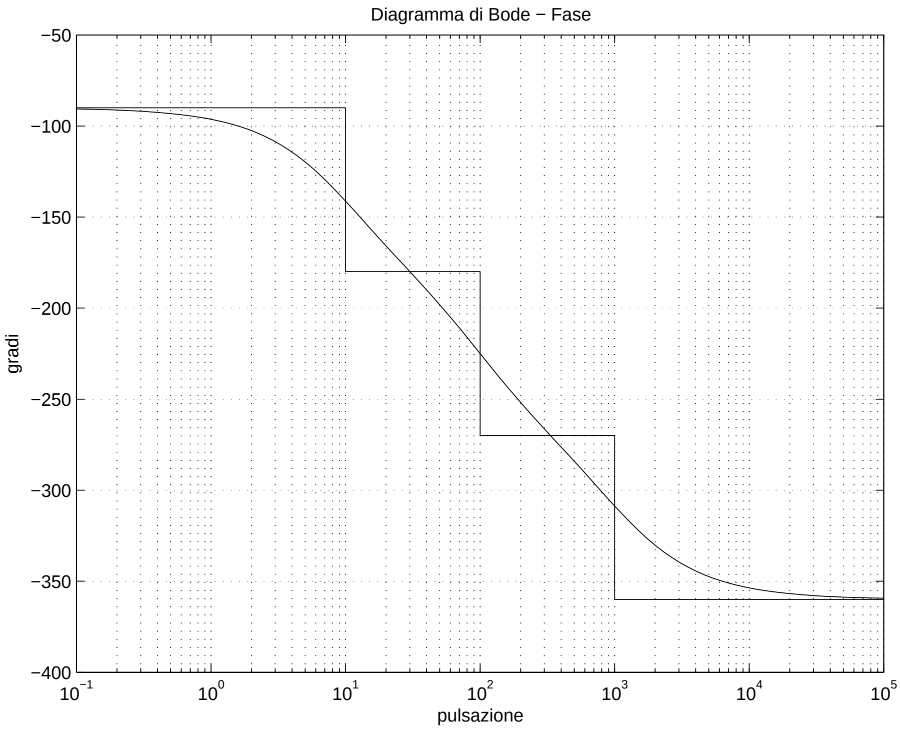
$$y_f(t) = \left[-2 + 2e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$W(s) = \frac{s(s-100)}{(s+10)(s+1000)} = -10^{-2}\frac{s(1-10^{-2}s)}{(1+10^{-1}s)(1+10^{-3}s)}$$

Pertanto $K_B = -10^{-2}$ e la risposta in frequenza presenta uno zero semplice nell'origine ($\nu = -1$), uno zero reale positivo con $1/T' = -100$ e $\mu' = 2$, un polo reale negativo con $1/T_1 = 10$ e $\mu_1 = 1$, e, infine, un secondo polo reale negativo con $1/T_2 = 1000$ e $\mu_2 = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.






ii) [2 punti] Il sistema è BIBO stabile quindi la risposta di regime permanente al segnale assegnato esiste ed è espressa nella forma

$$y_{rp}(t) = |W(j10^5)|\cos(10^5 t + \arg(W(j10^5)))\delta_{-1}(t).$$

I valori di $|W(j10^5)|$ e $\arg(W(j10^5))$ possono essere desunti da una semplice ispezione dei diagrammi di Bode. Si vede subito, infatti, che $|W(j10^5)| \approx 0\text{dB} = 1$ e $\arg(W(j10^5)) \approx -360^o = 2\pi$ rad. Pertanto

$$y_{rp}(t) = \cos(10^5 t)\delta_{-1}(t).$$

**Test C1.** [10 punti] 1 C 2 B 3 C 4 A 5 C.

**Test C2.** [10 punti] 1 B 2 A 3 C 4 A 5 A.

# I COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
# TEMI D1/D2 - A.A. 2003/2004

**Esercizio 1.** Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1+4a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (4+8a)\frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - u(t),$$

dove $a$ è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di $a$ in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$:

ii) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 2, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 0;$$

iii) si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t), t \in \mathbb{R}$;

iv) si determini la risposta (forzata) del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = [1 - e^{-t}]\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** Sia

$$W(s) = \frac{s(s-10)}{(s+1)(s+100)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $W(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) si dica se esiste la risposta (forzata) di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = \cos(10^4 t)\delta_{-1}(t)$$

e, in caso affermativo, la si calcoli almeno approssimativamente.

[Suggerimento: si sfrutti l'informazione approssimativa fornita dai diagrammi di Bode valutati al punto precedente].

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = as^3 + (1 + 4a)s^2 + (4 + 8a)s + 8.$$

Analizziamo separatamente il caso $a = 0$, in corrispondenza al quale il coefficiente del termine di grado 3 nell'equazione caratteristica è nullo e quindi l'equazione caratteristica ha grado 2. Questa situazione risulta accettabile dal momento che il sistema continua a rimanere proprio. Per $a = 0$ si trova

$$0 = s^2 + 4s + 8$$

che, in base alla regola dei segni di Cartesio, è chiaramente un polinomio di Hurwitz. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile giacché le sue radici sono tutte nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$. Per $a \neq 0$ l'equazione caratteristica coinvolge un polinomio di grado 3 e pertanto possiamo valutare per quali valori di $a$ essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s)$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \text{a} & \text{4 + 8a} \\
2 & 1+4a & 8 \\
1 & \dfrac{32a^2+16a+4}{1+4a} & 0 \\
0 & 8 & 0
\end{array}$$

Poichè l'ultimo elemento in prima colonna è positivo, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} a > 0 \\ 1 + 4a > 0 \\ \dfrac{32a^2+16a+4}{1+4a} > 0 \end{cases}$$

È immediato rendersi conto del fatto che nel momento in cui la prima condizione è soddisfatta lo sono anche le altre due. Pertanto (per $a \neq 0$) i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh sono tutti positivi se e solo se $a > 0$. Riassumendo, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$a \geq 0.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro $a$ per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro $a$ in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{as^3 + (1+4a)s^2 + (4+8a)s + 8}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 1, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro $a$ il polinomio al denominatore ha uno zero in 1 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 1 se e solo se

$$0 = as^3 + (1+4a)s^2 + (4+8a)s + 8\Big|_{s=1} = a + (1+4a) + (4+8a) + 8 = 13 + 13a.$$

La precedente equazione di primo grado nell'indeterminata $a$ ha soluzione $a = -1$. Per tale valore di $a$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{-s^3 - 3s^2 - 4s + 8} = -\frac{s+1}{s^2 + 4s + 8}$$

e quindi, per la regola dei segni di Cartesio, essa ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in \{-1\} \cup [0, +\infty)$.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^2 + 4s + 8 = (s+2)^2 + 2^2 = (s + 2 - j2)(s + 2 + j2)$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-2t} \cos(2t) + c_2 e^{-2t} \sin(2t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} 2 = \quad & y(0^-) && = && y_\ell(0^-) && = && c_1, \\ 0 = \quad & \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0^-} && = && \frac{dy_\ell(t)}{dt}\Big|_{t=0^-} && = && -2c_1 + 2c_2, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad c_2 = 2.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = 2e^{-2t} \cos(2t) + 2e^{-2t} \sin(2t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

iii) [2.5 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{s^2 - 1}{s^2 + 4s + 8} = \frac{s^2 + 4s + 8 - 4s - 9}{s^2 + 4s + 8} = 1 - 4\frac{s + \frac{9}{4}}{(s+2)^2 + 2^2} \\ &= 1 - 4\frac{s+2}{(s+2)^2 + 2^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{(s+2)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$w(t) = \delta(t) - \left[4e^{-2t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-2t}\sin(2t)\right]\delta_{-1}(t).$$

iv) [3 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso $u(t) = [1 - e^{-t}]\delta_{-1}(t)$ è

$$U(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

La trasformata di Laplace della corrispondente evoluzione forzata è data da

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{s^2 + 4s + 8} \cdot \frac{1}{s(s+1)} = \frac{s-1}{s[(s+2)^2 + 2^2]}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$Y_f(s) = -\frac{1}{8}\frac{1}{s} + \frac{1}{8}\frac{s+12}{(s+2)^2 + 2^2} = -\frac{1}{8}\frac{1}{s} + \frac{1}{8}\frac{s+2}{(s+2)^2 + 2^2} + \frac{5}{8}\frac{2}{(s+2)^2 + 2^2}$$

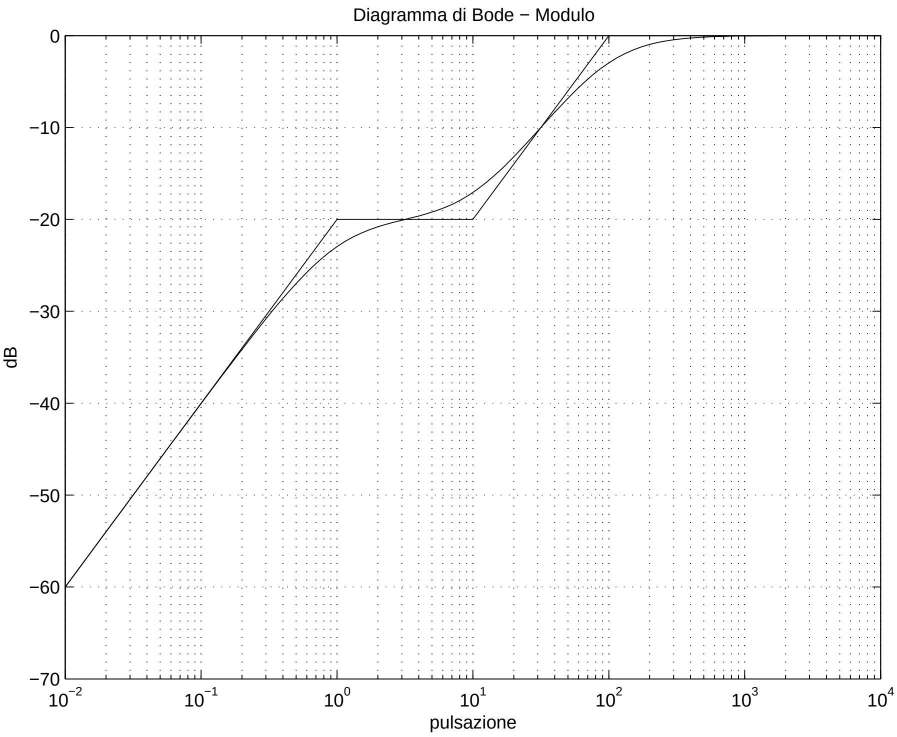
a cui corrisponde l'antitrasformata

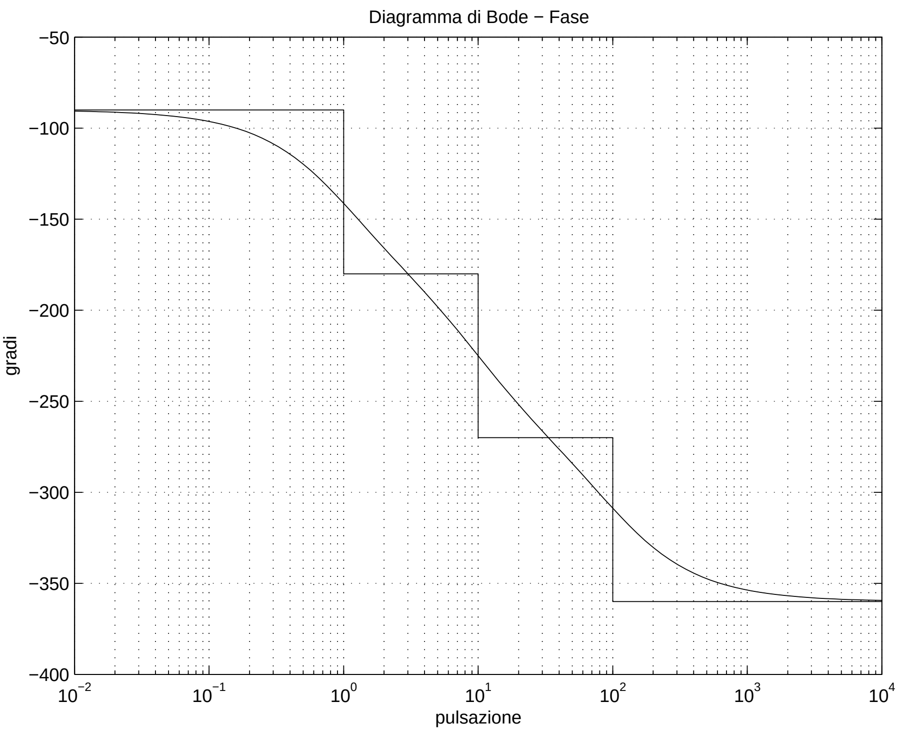
$$y_f(t) = \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{-2t}\cos(2t) + \frac{5}{8}e^{-2t}\sin(2t)\right)\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$W(s) = \frac{s(s-10)}{(s+1)(s+100)} = -0.1\frac{s(1 - 10^{-1}s)}{(1+s)(1 + 10^{-2}s)}$$

Pertanto $K_B = -0.1$ e la risposta in frequenza presenta uno zero semplice nell'origine ($\nu = -1$), uno zero reale positivo con $1/T' = -10$ e $\mu' = 2$, un polo reale negativo con $1/T_1 = 1$ e $\mu_1 = 1$, e, infine, un secondo polo reale negativo con $1/T_2 = 100$ e $\mu_2 = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.




ii) [2 punti] Il sistema è BIBO stabile quindi la risposta di regime permanente al segnale

assegnato esiste ed è espressa nella forma

$$y_{rp}(t) = |W(j10^4)| \cos(10^4 t + \arg(W(j10^4)))\delta_{-1}(t).$$

I valori di $|W(j10^4)|$ e $\arg(W(j10^4))$ possono essere desunti da una semplice ispezione dei diagrammi di Bode. Si vede subito, infatti, che $|W(j10^4)| \approx 0\text{dB} = 1$ e $\arg(W(j10^4)) \approx -360^o = 2\pi$ rad. Pertanto

$$y_{rp}(t) = \cos(10^4 t)\delta_{-1}(t).$$

**Test D1.** [10 punti] 1 B 2 A 3 C 4 A 5 B.

**Test D2.** [10 punti] 1 A 2 B 3 C 4 C 5 A.

# I COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
# TEMI E1/E2 - A.A. 2003/2004

**Esercizio 1.** Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1+2a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(2+\frac{5}{4}a\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{5}{4}y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{du}{dt},$$

dove $a$ è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di $a$ in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$:

ii) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 2, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 1;$$

iii) si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t), t \in \mathbb{R}$;

iv) si determini la risposta (forzata) del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = [e^t - 1]\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** Sia

$$W(s) = \frac{(s-10)(s+100)}{(s+1000)^2}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $W(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) si dica se esiste la risposta (forzata) di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = \cos(10^5 t)\delta_{-1}(t)$$

e, in caso affermativo, la si calcoli almeno approssimativamente.

[Suggerimento: si sfrutti l'informazione approssimativa fornita dai diagrammi di Bode valutati al punto precedente].

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = as^3 + (1+2a)s^2 + \left(2 + \frac{5}{4}a\right) s + \frac{5}{4}.$$

Analizziamo separatamente il caso $a = 0$, in corrispondenza al quale il coefficiente del termine di grado 3 nell'equazione caratteristica è nullo e quindi l'equazione caratteristica ha grado 2. Questa situazione risulta accettabile dal momento che il sistema continua a rimanere proprio. Per $a = 0$ si trova

$$0 = s^2 + 2s + \frac{5}{4}$$

che, in base alla regola dei segni di Cartesio, è chiaramente un polinomio di Hurwitz. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile giacché le sue radici sono tutte nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$. Per $a \neq 0$ l'equazione caratteristica coinvolge un polinomio di grado 3 e pertanto possiamo valutare per quali valori di $a$ essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s)$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \text{a} & 2 + \frac{5}{4}a \\[2ex]
2 & 1+2a & \frac{5}{4} \\[2ex]
1 & \dfrac{\frac{5}{2}a^2 + 4a + 2}{1+2a} & 0 \\[2ex]
0 & \frac{5}{4} & 0
\end{array}$$

Poichè l'ultimo elemento in prima colonna è positivo, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} a > 0 \\[2ex] 1 + 2a > 0 \\[2ex] \dfrac{\frac{5}{2}a^2 + 4a + 2}{1+2a} > 0 \end{cases}$$

È immediato rendersi conto del fatto che nel momento in cui la prima condizione è soddisfatta lo sono anche le altre due. Pertanto (per $a \neq 0$) i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh sono tutti positivi se e solo se $a > 0$. Riassumendo, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$a \geq 0.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro $a$ per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro $a$ in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2+s}{as^3+(1+2a)s^2+\left(2+\frac{5}{4}a\right)s+\frac{5}{4}}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 0, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro $a$ il polinomio al denominatore ha uno zero in 0 e i rimanenti zeri sono a parte reale negativa. Osserviamo che il polinomio al denominatore non si annulla mai in 0. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \geq 0$.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^2+2s+\frac{5}{4} = (s+1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(s+1-j\frac{1}{2}\right)\left(s+1+j\frac{1}{2}\right)$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t}\cos\left(\frac{t}{2}\right)+c_2e^{-t}\sin\left(\frac{t}{2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} 2 = \quad & y(0^-) & = \quad & y_\ell(0^-) & = \quad & c_1, \\ 1 = \quad & \left.\tfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & \left.\tfrac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & -c_1+\tfrac{c_2}{2}, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad c_2 = 6.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = 2e^{-t}\cos\left(\frac{t}{2}\right)+6e^{-t}\sin\left(\frac{t}{2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

iii) [2.5 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{s^2+s}{s^2+2s+\frac{5}{4}} = \frac{s^2+2s+\frac{5}{4}-s-\frac{5}{4}}{s^2+2s+\frac{5}{4}} = 1-\frac{s+\frac{5}{4}}{(s+1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= 1-\frac{s+1}{(s+1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$w(t) = \delta(t)-\left[e^{-t}\cos\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]\delta_{-1}(t).$$

iv) [3 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso $u(t) = [e^t - 1]\delta_{-1}(t)$ è

$$U(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s-1)}.$$

La trasformata di Laplace della corrispondente evoluzione forzata è data da

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s(s+1)}{s^2+2s+\frac{5}{4}} \cdot \frac{1}{s(s-1)} = \frac{s+1}{(s-1)\left[(s+1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$Y_f(s) = \frac{8}{17}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{17}\frac{8s+7}{(s+1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{8}{17}\frac{1}{s-1} - \frac{8}{17}\frac{s+1}{(s+1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2}{17}\frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

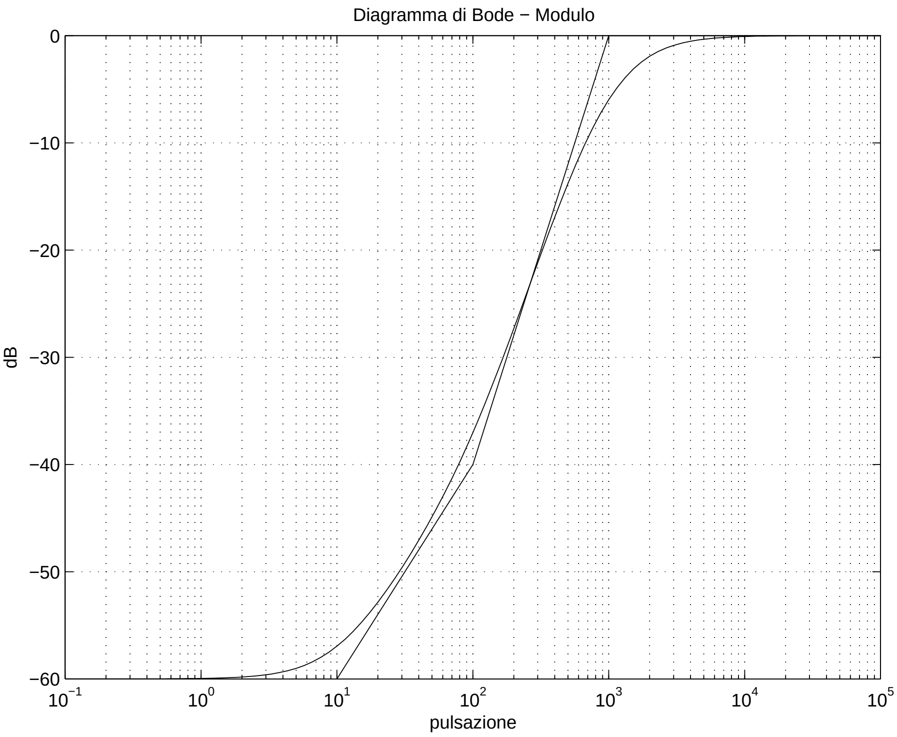
a cui corrisponde l'antitrasformata

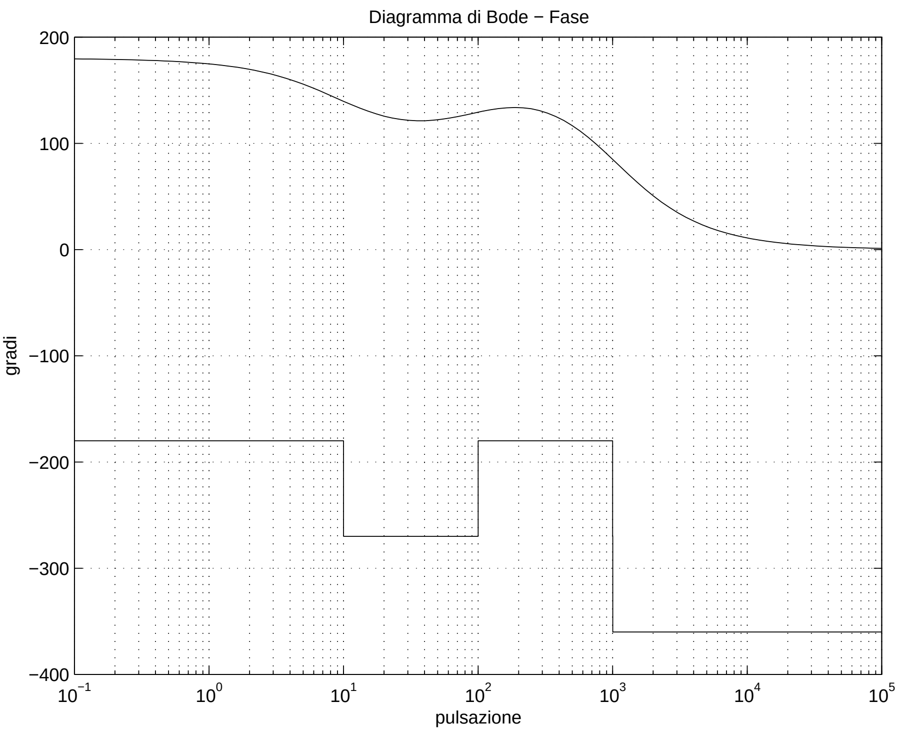
$$y_f(t) = \left(\frac{8}{17}e^t - \frac{8}{17}e^{-t}\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{2}{17}e^{-t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$W(s) = \frac{(s-10)(s+100)}{(s+1000)^2} = -10^{-3}\frac{(1-0.1s)(1+10^{-2}s)}{(1+10^{-3}s)^2}$$

Pertanto $K_B = -10^{-3}$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale positivo con $1/T_1' = -10$ e $\mu_1' = 1$, uno zero reale negativo con $1/T_2' = 100$ e $\mu_2' = 1$, un polo reale negativo con $1/T_1 = 1000$ e $\mu_1 = 2$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.




ii) [2 punti] Il sistema è BIBO stabile quindi la risposta di regime permanente al segnale

assegnato esiste ed è espressa nella forma

$$y_{rp}(t) = |W(j10^5)| \cos(10^5 t + \arg(W(j10^5)))\delta_{-1}(t).$$

I valori di $|W(j10^5)|$ e $\arg(W(j10^5))$ possono essere desunti da una semplice ispezione dei diagrammi di Bode. Si vede subito, infatti, che $|W(j10^5)| \approx 0\text{dB} = 1$ e $\arg(W(j10^5)) \approx -360^o = 2\pi$ rad. Pertanto

$$y_{rp}(t) = \cos(10^5 t)\delta_{-1}(t).$$

**Test E1.** [10 punti] 1 C 2 C 3 C 4 A 5 C.

**Test E2.** [10 punti] 1 C 2 C 3 C 4 A 5 B.

# I COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
# TEMI F1/F2 - A.A. 2003/2004

**Esercizio 1.** Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1+a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(1+\frac{5}{4}a\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{5}{4}y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{du}{dt},$$

dove $a$ è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di $a$ in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$:

ii) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 2, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 1;$$

iii) si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t), t \in \mathbb{R}$;

iv) si determini la risposta (forzata) del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = [e^t - 1]\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** Sia

$$W(s) = \frac{(s+10)(s-1000)}{(s+100)^2}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $W(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) si dica se esiste la risposta (forzata) di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = \cos(10^5 t)\delta_{-1}(t)$$

e, in caso affermativo, la si calcoli almeno approssimativamente.

[Suggerimento: si sfrutti l'informazione approssimativa fornita dai diagrammi di Bode valutati al punto precedente].

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è
$$0 = as^3 + (1+a)s^2 + \left(1 + \frac{5}{4}a\right)s + \frac{5}{4}.$$
Analizziamo separatamente il caso $a = 0$, in corrispondenza al quale il coefficiente del termine di grado 3 nell'equazione caratteristica è nullo e quindi l'equazione caratteristica ha grado 2. Questa situazione risulta accettabile dal momento che il sistema continua a rimanere proprio. Per $a = 0$ si trova
$$0 = s^2 + s + \frac{5}{4}$$
che, in base alla regola dei segni di Cartesio, è chiaramente un polinomio di Hurwitz. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile giacché le sue radici sono tutte nel semipiano $\mathrm{Re}(s) < 0$. Per $a \neq 0$ l'equazione caratteristica coinvolge un polinomio di grado 3 e pertanto possiamo valutare per quali valori di $a$ essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s)$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & \text{a} & 1 + \frac{5}{4}a \\
2 & 1+a & \frac{5}{4} \\
1 & \dfrac{\frac{5}{4}a^2 + a + 1}{1+a} & 0 \\
0 & \frac{5}{4} & 0
\end{array}$$

Poichè l'ultimo elemento in prima colonna è positivo, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se
$$\begin{cases} a > 0 \\ 1 + a > 0 \\ \dfrac{\frac{5}{4}a^2 + a + 1}{1+a} > 0 \end{cases}$$
È immediato rendersi conto del fatto che nel momento in cui la prima condizione è soddisfatta lo sono anche le altre due. Pertanto (per $a \neq 0$) i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh sono tutti positivi se e solo se $a > 0$. Riassumendo, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se
$$a \geq 0.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro $a$ per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro $a$ in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 + s}{as^3 + (1+a)s^2 + \left(1 + \frac{5}{4}a\right)s + \frac{5}{4}}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 0, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro $a$ il polinomio al denominatore ha uno zero in 0 e i rimanenti zeri sono a parte reale negativa. Osserviamo che il polinomio al denominatore non si annulla mai in 0. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \geq 0$.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^2 + s + \frac{5}{4} = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \left(s + \frac{1}{2} - j\right)\left(s + \frac{1}{2} + j\right)$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos t + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} 2 = \quad & y(0^-) & = \quad & y_\ell(0^-) & = \quad & c_1, \\ 1 = \quad & \left.\tfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & \left.\tfrac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & -\tfrac{c_1}{2} + c_2, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad c_2 = 2.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} \cos t + 2e^{-\frac{t}{2}} \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

iii) [2.5 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2 + s}{s^2 + s + \frac{5}{4}} = \frac{s^2 + s + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}}{s^2 + s + \frac{5}{4}} = 1 - \frac{5}{4} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$w(t) = \delta(t) - \frac{5}{4} e^{-\frac{t}{2}} \sin t \delta_{-1}(t).$$

iv) [3 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso $u(t) = [e^t - 1]\delta_{-1}(t)$ è

$$U(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s-1)}.$$

La trasformata di Laplace della corrispondente evoluzione forzata è data da

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s(s+1)}{s^2+s+\frac{5}{4}} \cdot \frac{1}{s(s-1)} = \frac{s+1}{(s-1)\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right]}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$Y_f(s) = \frac{8}{13}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{13}\frac{8s+3}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{8}{13}\frac{1}{s-1} - \frac{8}{13}\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} + \frac{1}{13}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

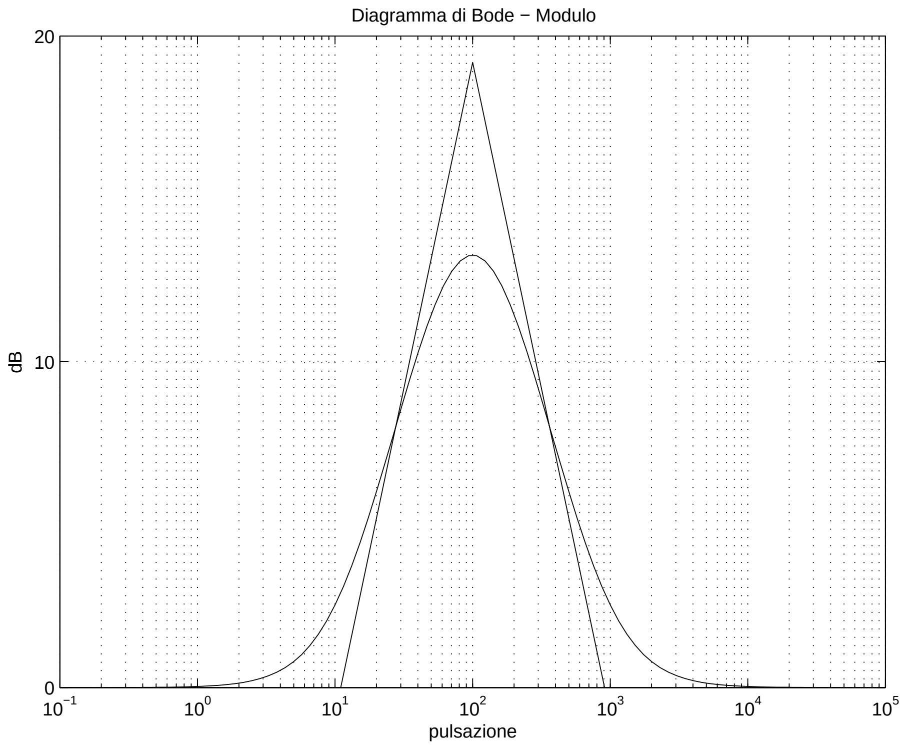
a cui corrisponde l'antitrasformata

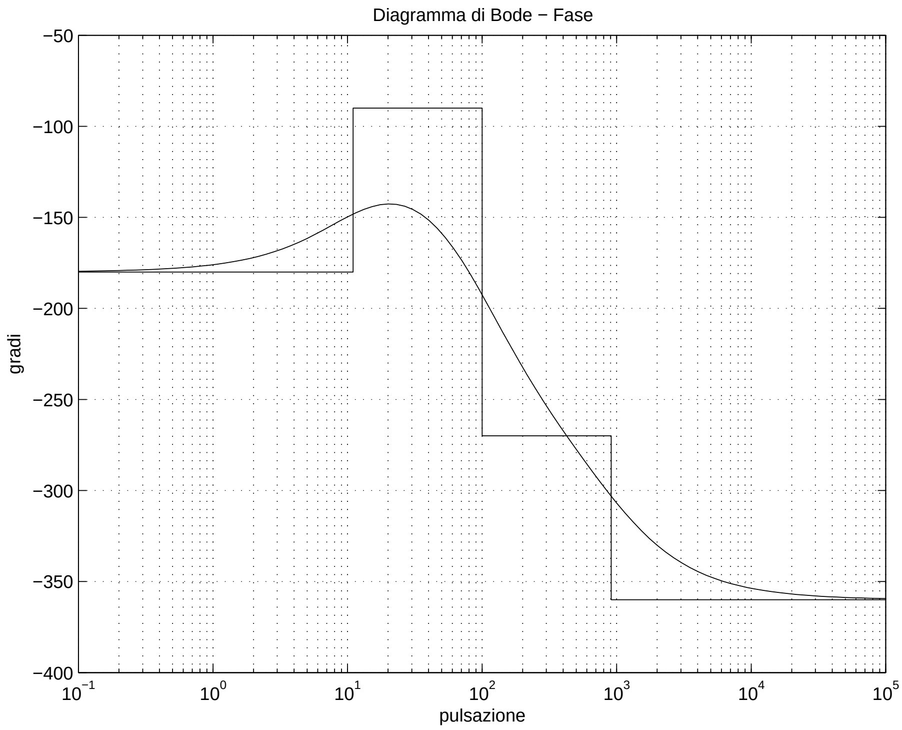
$$y_f(t) = \left(\frac{8}{13}e^t - \frac{8}{13}e^{-\frac{t}{2}}\cos t + \frac{1}{13}e^{-\frac{t}{2}}\sin t\right)\delta_{-1}(t).$$

**Esercizio 2.** i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$W(s) = \frac{(s+10)(s-1000)}{(s+100)^2} = -\frac{(1+0.1s)(1-10^{-3}s)}{(1+10^{-2}s)^2}$$

Pertanto $K_B = -1$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale positivo con $1/T_1' = -1000$ e $\mu_1' = 1$, uno zero reale negativo con $1/T_2' = 10$ e $\mu_2' = 1$, un polo reale negativo con $1/T_1 = 100$ e $\mu_1 = 2$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.




ii) [2 punti] Il sistema è BIBO stabile quindi la risposta di regime permanente al segnale

assegnato esiste ed è espressa nella forma

$$y_{rp}(t) = |W(j10^5)| \cos(10^5 t + \arg(W(j10^5)))\delta_{-1}(t).$$

I valori di $|W(j10^5)|$ e $\arg(W(j10^5))$ possono essere desunti da una semplice ispezione dei diagrammi di Bode. Si vede subito, infatti, che $|W(j10^5)| \approx 0\text{dB} = 1$ e $\arg(W(j10^5)) \approx -360^o = 2\pi$ rad. Pertanto

$$y_{rp}(t) = \cos(10^5 t)\delta_{-1}(t).$$

**Test F1.** [10 punti] 1 A 2 B 3 C 4 A 5 C.

**Test F2.** [10 punti] 1 B 2 A 3 C 4 A 5 C.