

II COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)

TEMA A - A.A. 2003/2004

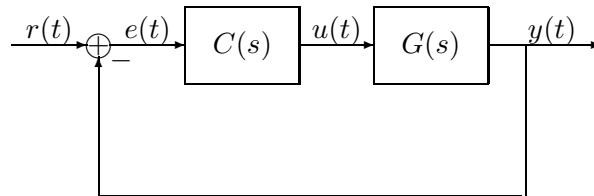
Esercizio 1. Dato il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+100)}$$

i) si determini la risposta al gradino del sistema, e se ne valuti, almeno in modo approssimativo, tempo di salita, e, se esistono, tempo di assestamento e sovraelongazione;

ii) si determini il tipo del sistema e il relativo errore di regime permanente.

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



iii) si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

1) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) al più pari ad 0.05;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

2) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 10^2$ rad/sec;

3) abbia margine di fase pari almeno a 50° .

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 0.1 \frac{(s-100)(s+1)}{s(s-1)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{100}{s(s+1)(s+100)} = \frac{1}{s} - \frac{100}{99} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{99} \frac{1}{s+100}$$

e corrisponde al segnale

$$y(t) = \left[1 - \frac{100}{99}e^{-t} + \frac{1}{99}e^{-100t} \right] \delta_{-1}(t).$$

La sua derivata vale per $t > 0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{100}{99}e^{-t} - \frac{100}{99}e^{-100t}.$$

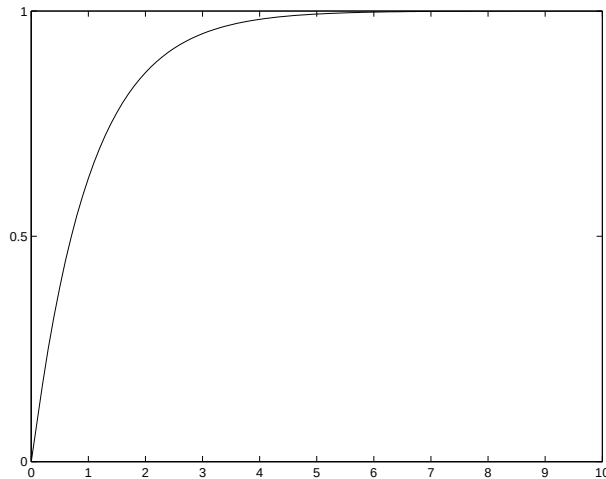
Chiaramente tale derivata è sempre non negativa e si annulla solo per $t = 0$, e pertanto la risposta al gradino ha un andamento monotono crescente. Non esiste sovraelongazione e tempo di salita e di assestamento coincidono e si trovano imponendo

$$y(t_r) = 0.9y(+\infty) = 0.9.$$

Poiché dei due esponenziali uno è a decadimento rapidissimo, nella valutazione del tempo di salita possiamo ricorrere all'espressione approssimata della risposta al gradino:

$$y(t) \approx \left[1 - \frac{100}{99}e^{-t} \right] \delta_{-1}(t).$$

Si trova, quindi, $t_r \approx \ln 10 = 2.3$ s. Il grafico della risposta al gradino è il seguente:



ii) [4 punti] È immediato rendersi conto del fatto che $G(0) = 1$ e quindi il sistema è almeno di tipo 1. Il calcolo di $\frac{dG(0)}{ds}$ fornisce

$$\left. \frac{dG}{ds} \right|_{s=0} = - \frac{100}{(s+1)^2(s+100)^2} \cdot (2s+101) \Big|_{s=0} = - \frac{100 \cdot 101}{100^2} = -1.01.$$

Pertanto, il sistema è di tipo 1 e risponde alla rampa lineare unitaria con il segnale in regime permanente

$$y_{rp}(t) = [t - 1.01]\delta_{-1}(t)$$

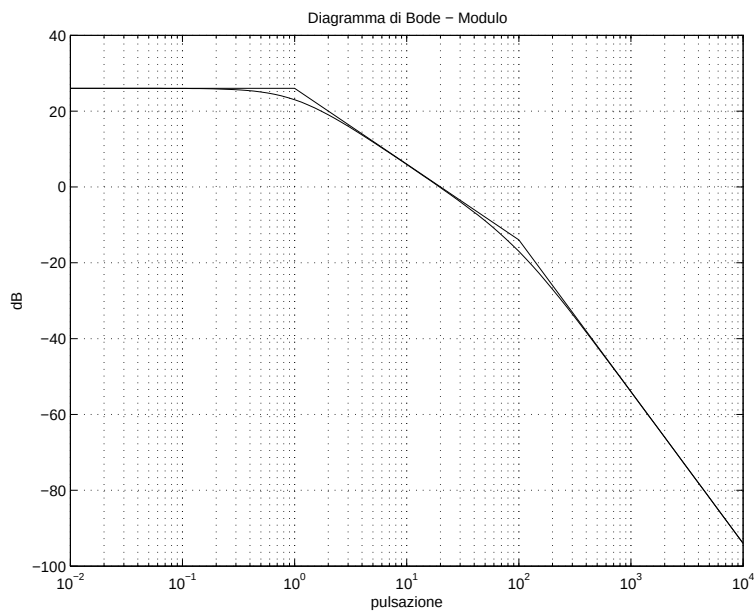
e l'errore di regime permanente è $e_{rp} = 1.01$.

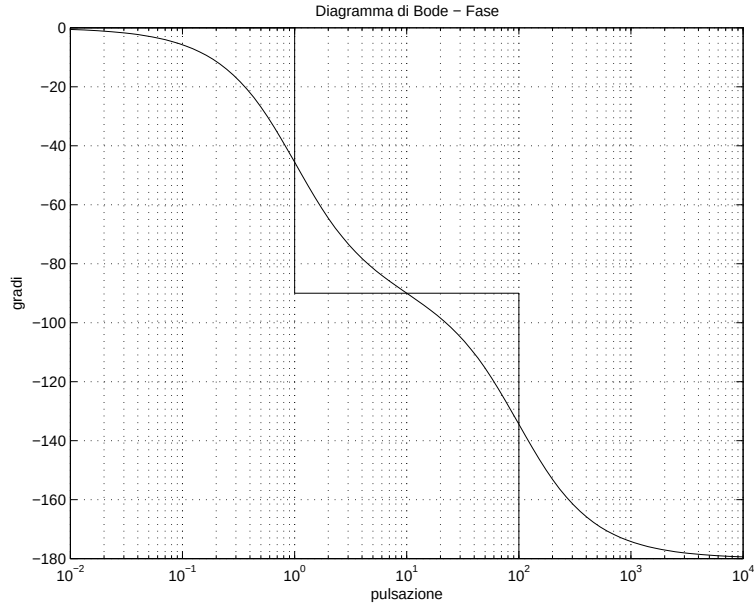
iii) [4 punti] Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \leq 0.05$$

da cui segue $K_B(C) \geq 19$. Prendiamo $K_B(C) = 20$ a cui corrisponde $C'(s) = 20$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:

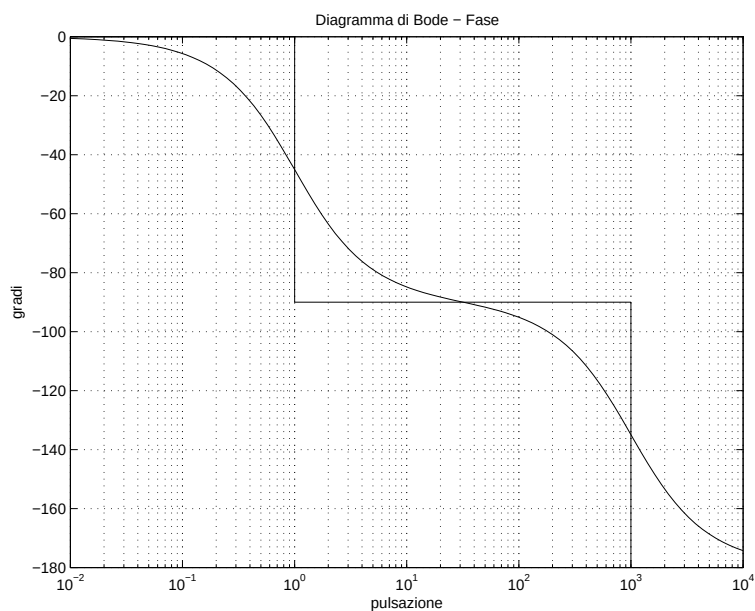
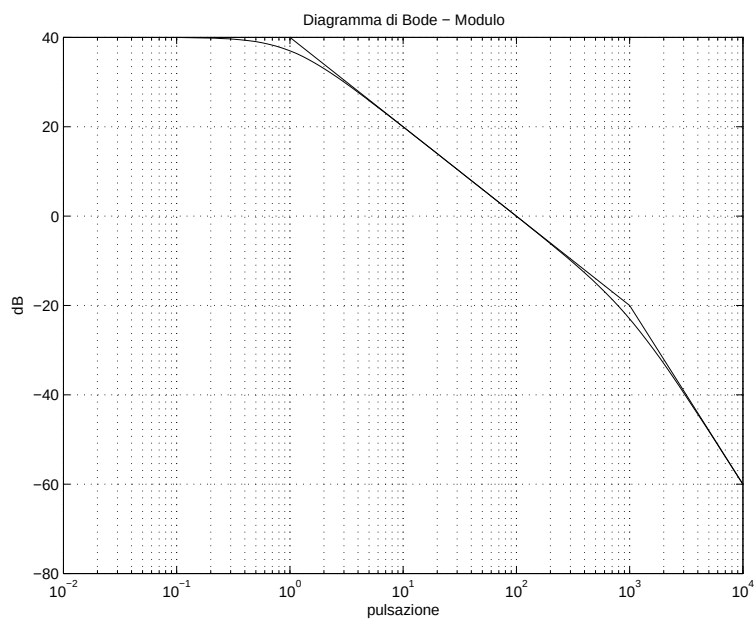




Si trova $20 \text{ rad/s} \approx \omega_A < \omega_A^* = 10^2 \text{ rad/s}$ e $m_\psi(\omega_A^*) := 180^\circ + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $45^\circ \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 50^\circ$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze fino a far sì che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 100 \text{ rad/s}$ e di sollevare la fase di almeno 5° . A tal fine basta portare il guadagno di Bode dal valore 26.0206 dB al valore 40 dB, ovvero da 20 a 100, cancellare il polo in -100 rad/s e sostituirlo, ad esempio, con un polo in -1000 . In tal modo la pulsazione di attraversamento è quella desiderata e il margine di fase è quasi 90° . Questa soluzione corrisponde a

$$C(s) = 100 \frac{1 + 0.01s}{1 + 0.001s}$$

e porta ai seguenti diagrammi di Bode:

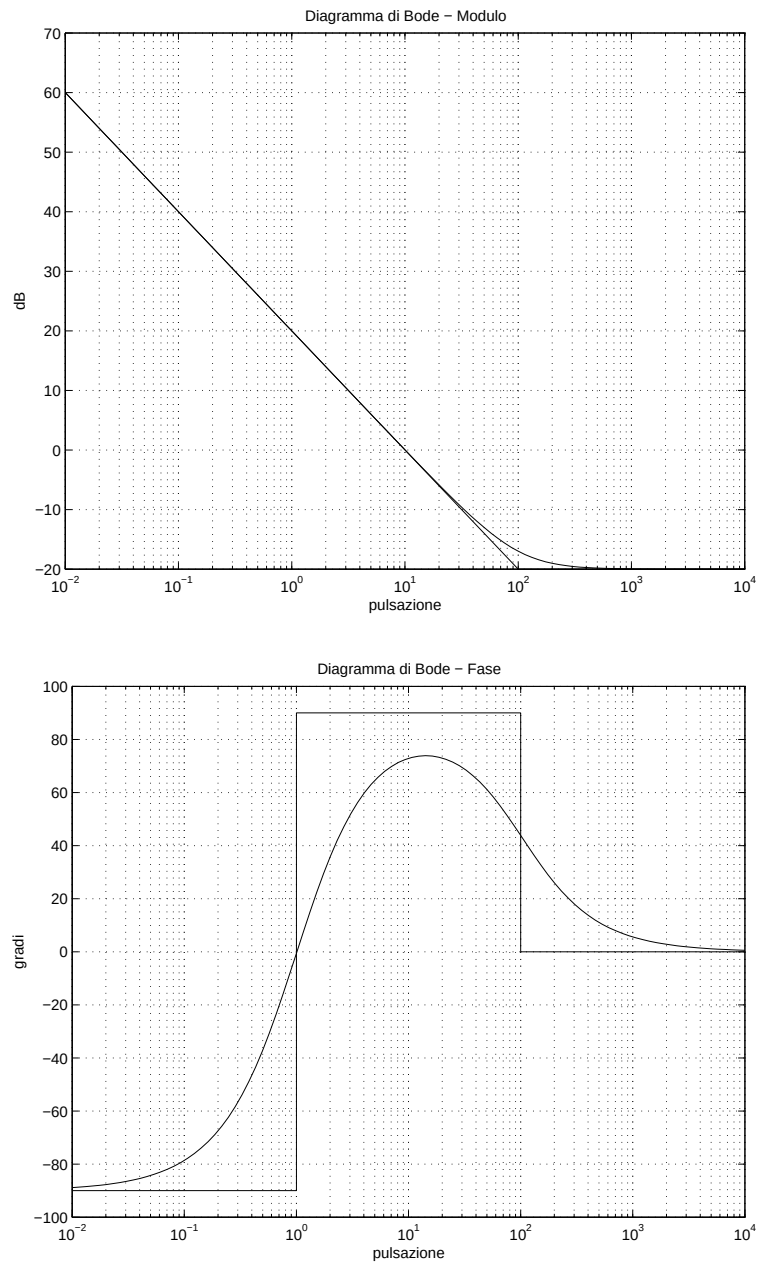


Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

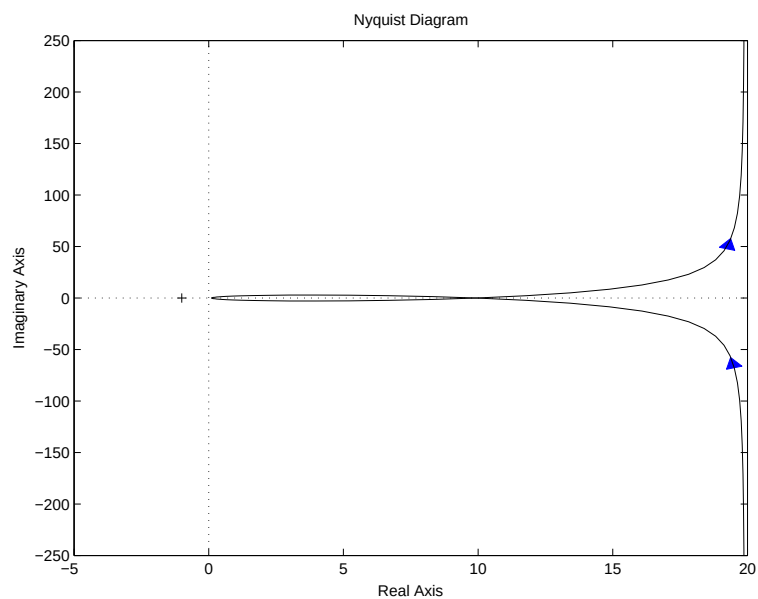
$$G(s) = 0.1 \frac{(s - 100)(s + 1)}{s(s - 1)} = 10 \frac{(1 + s)(1 - 10^{-2}s)}{s(1 - s)}.$$

Pertanto $K_B = 10$ e la risposta in frequenza presenta uno polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale positivo con $1/T'_1 = -100$ e $\mu'_1 = 1$, uno zero reale negativo con $1/T'_2 = 1$ e $\mu'_2 = 1$, un polo reale positivo con $1/T = -1$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di

Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.



ii) [4 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Poichè $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, e un polo semplice nell'origine, riportando il diagramma di Nyquist al finito attraverso un percorso di Nyquist modificato, trovo $N = 0$ e pertanto $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo a parte reale positiva.

Test. [10 punti] 1B 2 C 3 C 4 A 5 A.

II COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)

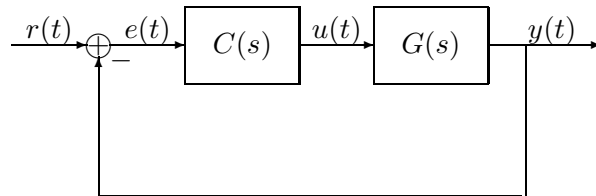
TEMA B - A.A. 2003/2004

Esercizio 1. Dato il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s + 0.1)(s + 10)}$$

- i) si determini la risposta al gradino del sistema, e se ne valuti, almeno in modo approssimativo, tempo di salita, e, se esistono, tempo di assestamento e sovraelongazione;
- ii) si determini il tipo del sistema e il relativo errore di regime permanente.

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



- iii) si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

- 1) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) al più pari ad 0.05;
- e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,
- 2) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 10$ rad/sec;
 - 3) abbia margine di fase pari almeno a 50° .

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 0.01 \frac{(s - 1000)(s + 10)}{s(s - 10)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

- i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$;
- ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+0.1)(s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{100}{99} \frac{1}{s+0.1} + \frac{1}{99} \frac{1}{s+10}$$

e corrisponde al segnale

$$y(t) = \left[1 - \frac{100}{99} e^{-0.1t} + \frac{1}{99} e^{-10t} \right] \delta_{-1}(t).$$

La sua derivata vale per $t > 0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{100}{99} e^{-0.1t} - \frac{100}{99} e^{-10t}.$$

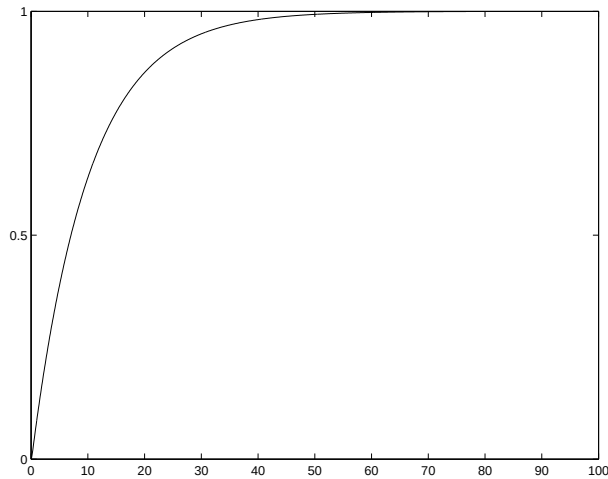
Chiaramente tale derivata è sempre non negativa e si annulla solo per $t = 0$, e pertanto la risposta al gradino ha un andamento monotono crescente. Non esiste sovraelongazione e tempo di salita e di assestamento coincidono e si trovano imponendo

$$y(t_r) = 0.9y(+\infty) = 0.9.$$

Poiché dei due esponenziali uno è a decadimento rapidissimo, nella valutazione del tempo di salita possiamo ricorrere all'espressione approssimata della risposta al gradino:

$$y(t) \approx \left[1 - \frac{100}{99} e^{-0.1t} \right] \delta_{-1}(t).$$

Si trova, quindi, $t_r \approx 10 \ln 10 = 23$ s. Il grafico della risposta al gradino è il seguente:



ii) [4 punti] È immediato rendersi conto del fatto che $G(0) = 1$ e quindi il sistema è almeno di tipo 1. Il calcolo di $\frac{dG(0)}{ds}$ fornisce

$$\left. \frac{dG}{ds} \right|_{s=0} = - \frac{1}{(s+0.1)^2(s+10)^2} \cdot (2s+10.1) \Big|_{s=0} = - \frac{10.1}{1} = -10.1.$$

Pertanto, il sistema è di tipo 1 e risponde alla rampa lineare unitaria con il segnale in regime permanente

$$y_{rp}(t) = [t - 10.1]\delta_{-1}(t)$$

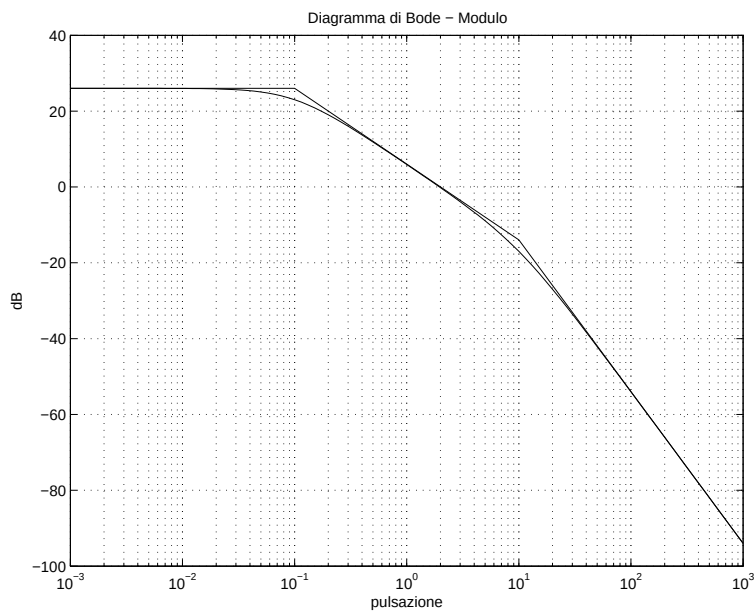
e l'errore di regime permanente è $e_{rp} = 10.1$.

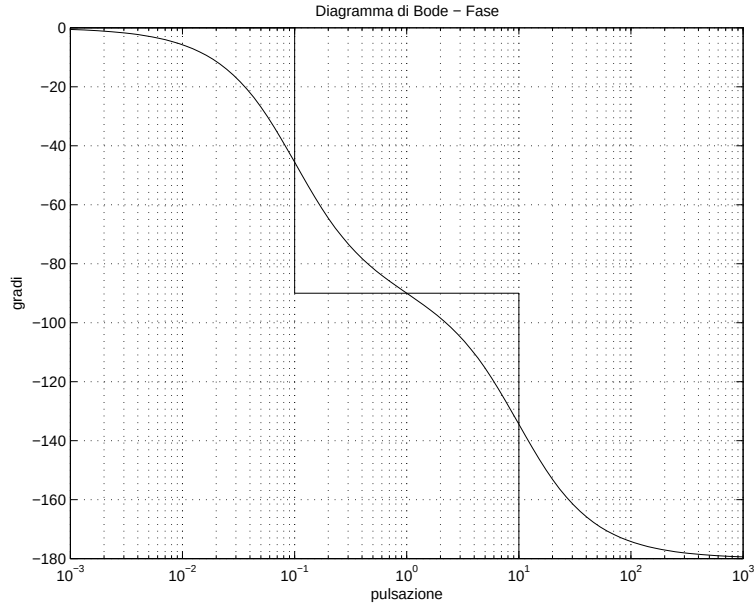
iii) [4 punti] Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \leq 0.05$$

da cui segue $K_B(C) \geq 19$. Prendiamo $K_B(C) = 20$ a cui corrisponde $C'(s) = 20$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:

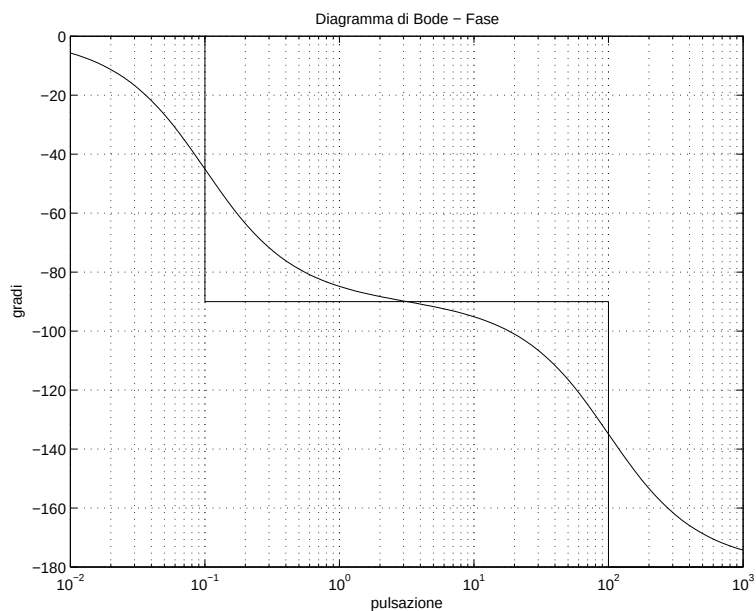
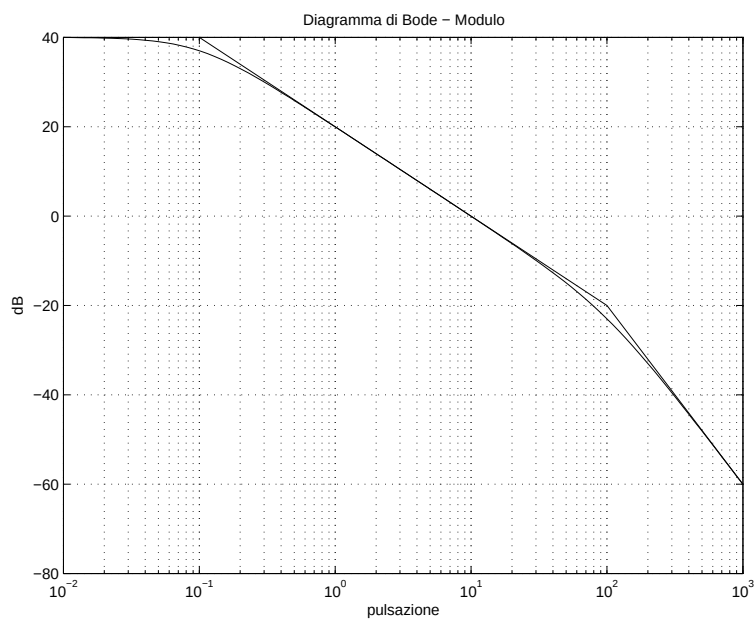




Si trova $2 \text{ rad/s} \approx \omega_A < \omega_A^* = 10 \text{ rad/s}$ e $m_\psi(\omega_A^*) := 180^\circ + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $45^\circ \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 50^\circ$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze fino a far sì che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 10 \text{ rad/s}$ e di sollevare la fase di almeno 5° . A tal fine basta portare il guadagno di Bode dal valore 26.0206 dB al valore 40 dB, ovvero da 20 a 100, cancellare il polo in -10 rad/s e sostituirlo, ad esempio, con un polo in -100 . In tal modo la pulsazione di attraversamento è quella desiderata e il margine di fase è quasi 90° . Questa soluzione corrisponde a

$$C(s) = 100 \frac{1 + 0.1s}{1 + 0.01s}$$

e porta ai seguenti diagrammi di Bode:

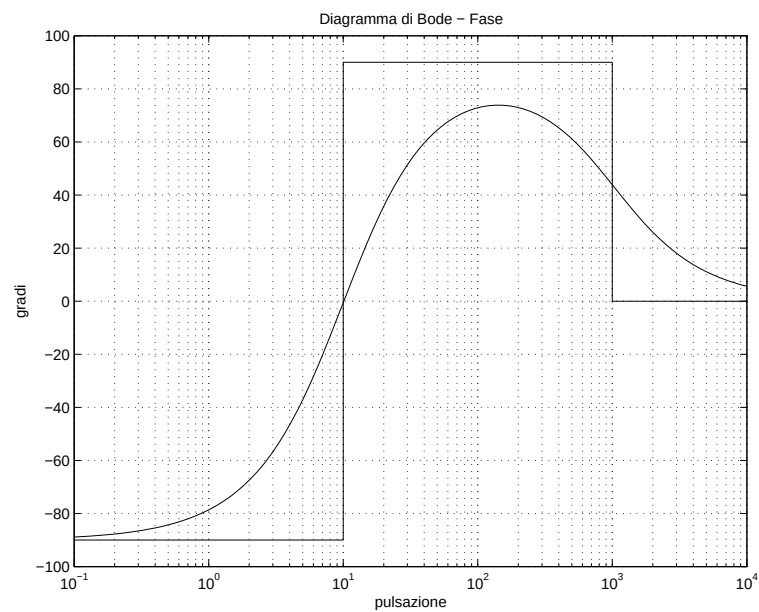
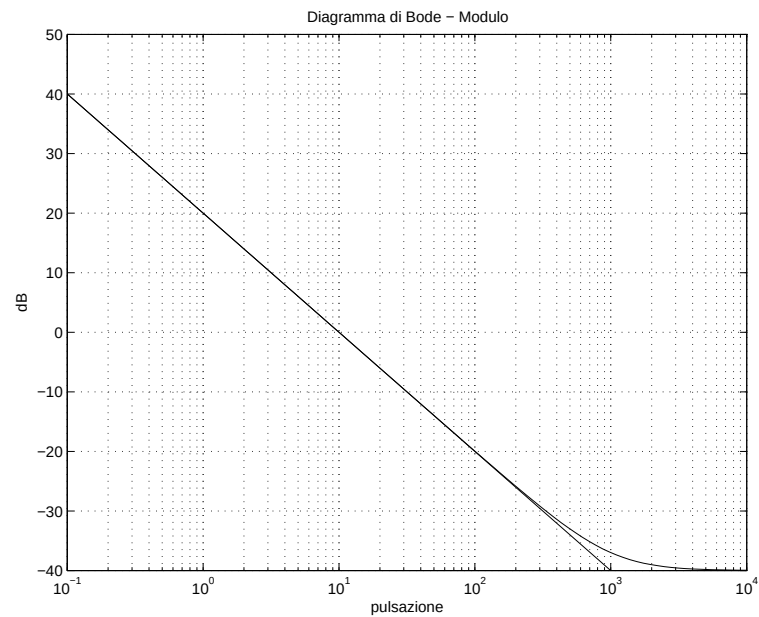


Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

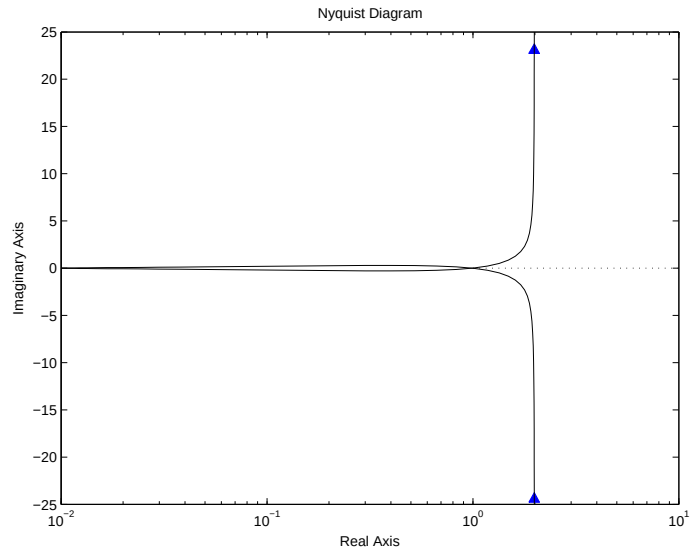
$$G(s) = 0.01 \frac{(s - 1000)(s + 10)}{s(s - 10)} = 10 \frac{(1 + 0.1s)(1 - 10^{-3}s)}{s(1 - 0.1s)}.$$

Pertanto $K_B = 10$ e la risposta in frequenza presenta uno polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale positivo con $1/T'_1 = -1000$ e $\mu'_1 = 1$, uno zero reale negativo con $1/T'_2 = 10$ e $\mu'_2 = 1$, un polo reale positivo con $1/T = -10$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei

diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.



ii) [4 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Poichè $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, e un polo semplice nell'origine, riportando il diagramma di Nyquist al finito attraverso un percorso di Nyquist modificato, trovo $N = 0$ e pertanto $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo a parte reale positiva.

Test. [10 punti] 1C 2 A 3 C 4 C 5 A.

II COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)

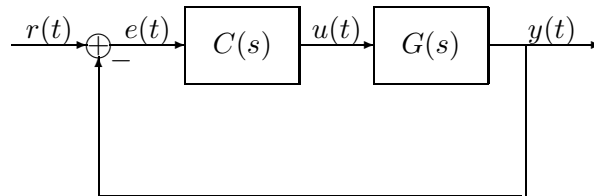
TEMA C - A.A. 2003/2004

Esercizio 1. Dato il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10000}{(s + 1000)(s + 10)}$$

- i) si determini la risposta al gradino del sistema, e se ne valuti, almeno in modo approssimativo, tempo di salita, e, se esistono, tempo di assestamento e sovraelongazione;
- ii) si determini il tipo del sistema e il relativo errore di regime permanente.

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



- iii) si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

- 1) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) al più pari ad 0.05;
- e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,
- 2) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 10^3$ rad/sec;
 - 3) abbia margine di fase pari almeno a 50° .

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 0.01 \frac{(s + 1000)(s + 1)}{s(s - 1)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

- i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$;
- ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{10000}{s(s+1000)(s+10)} = \frac{1}{s} - \frac{100}{99} \frac{1}{s+10} + \frac{1}{99} \frac{1}{s+1000}$$

e corrisponde al segnale

$$y(t) = \left[1 - \frac{100}{99} e^{-10t} + \frac{1}{99} e^{-1000t} \right] \delta_{-1}(t).$$

La sua derivata vale per $t > 0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1000}{99} e^{-10t} - \frac{1000}{99} e^{-1000t}.$$

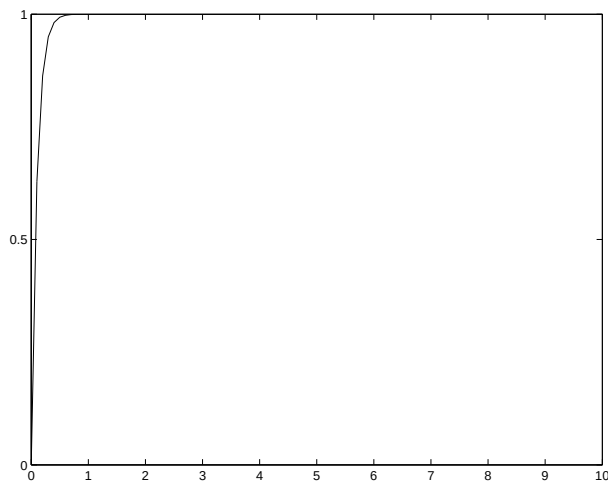
Chiaramente tale derivata è sempre non negativa e si annulla solo per $t = 0$, e pertanto la risposta al gradino ha un andamento monotono crescente. Non esiste sovraelongazione e tempo di salita e di assestamento coincidono e si trovano imponendo

$$y(t_r) = 0.9y(+\infty) = 0.9.$$

Poiché dei due esponenziali uno è a decadimento rapidissimo, nella valutazione del tempo di salita possiamo ricorrere all'espressione approssimata della risposta al gradino:

$$y(t) \approx \left[1 - \frac{100}{99} e^{-10t} \right] \delta_{-1}(t).$$

Si trova, quindi, $t_r \approx \frac{\ln 10}{10} = 0.23$ s. Il grafico della risposta al gradino è il seguente:



ii) [4 punti] È immediato rendersi conto del fatto che $G(0) = 1$ e quindi il sistema è almeno di tipo 1. Il calcolo di $\frac{dG(0)}{ds}$ fornisce

$$\left. \frac{dG}{ds} \right|_{s=0} = -\frac{10000}{(s+10)^2(s+1000)^2} \cdot (2s+1010) \Big|_{s=0} = -\frac{10^4 \cdot 1010}{10^2 \cdot 10^6} = -0.101.$$

Pertanto, il sistema è di tipo 1 e risponde alla rampa lineare unitaria con il segnale in regime permanente

$$y_{rp}(t) = [t - 0.101]\delta_{-1}(t)$$

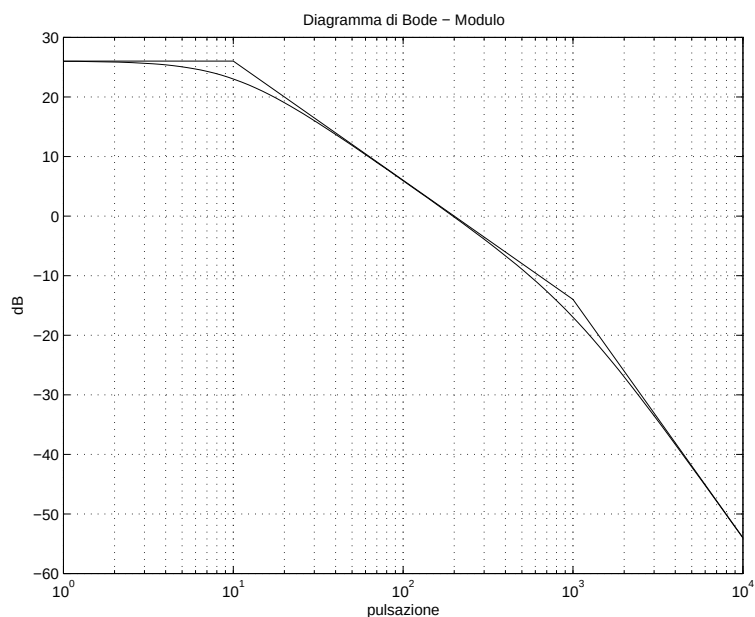
e l'errore di regime permanente è $e_{rp} = 0.101$.

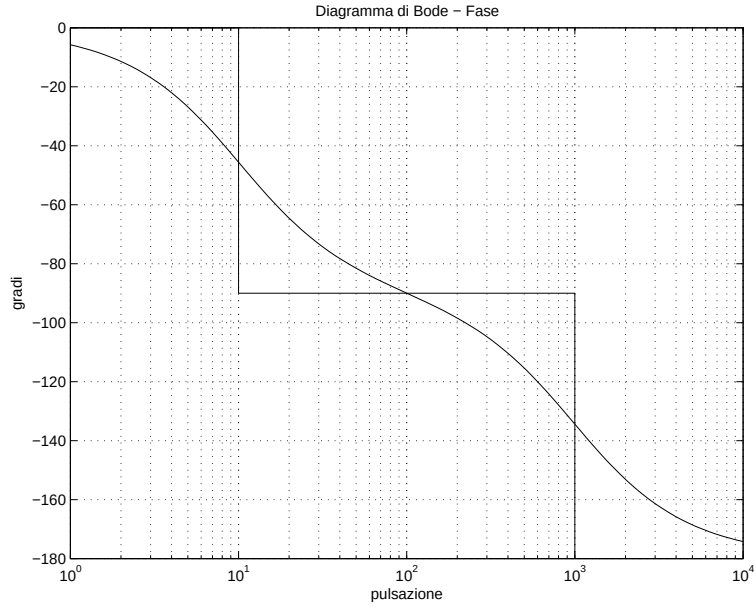
iii) [4 punti] Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \leq 0.05$$

da cui segue $K_B(C) \geq 19$. Prendiamo $K_B(C) = 20$ a cui corrisponde $C'(s) = 20$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:

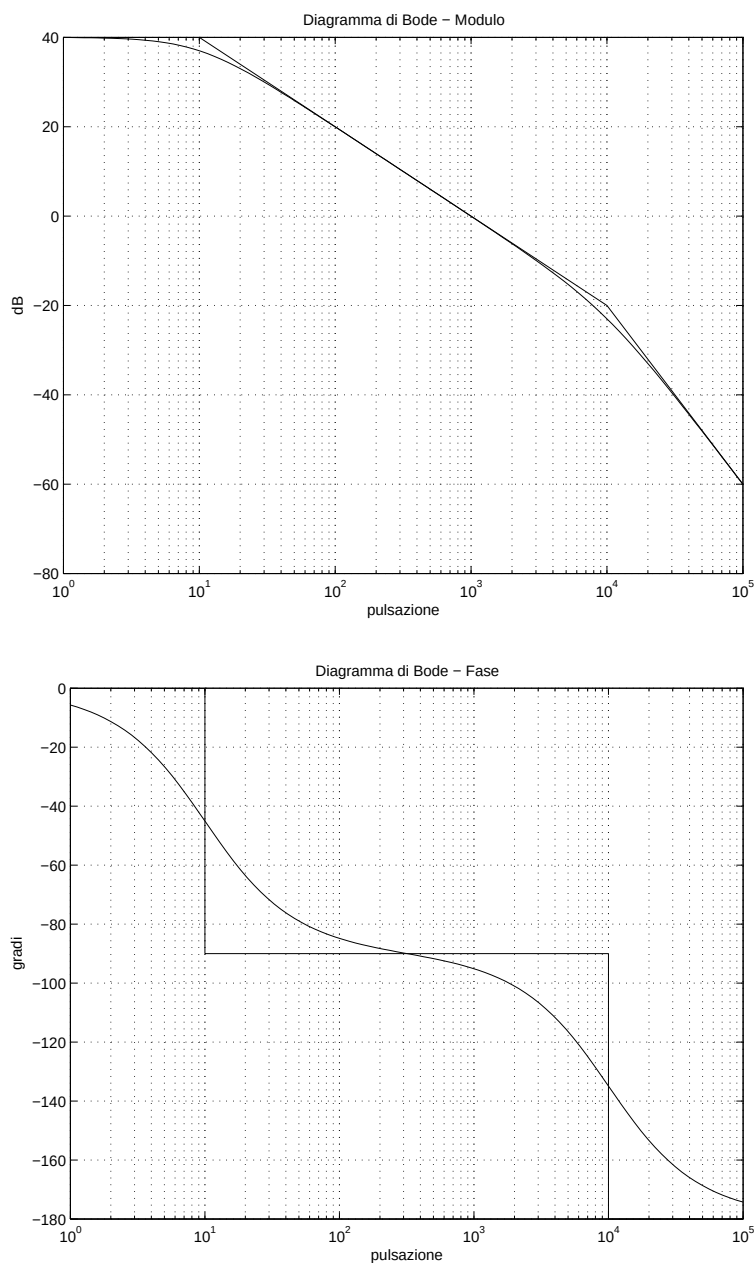




Si trova $200 \text{ rad/s} \approx \omega_A < \omega_A^* = 10^3 \text{ rad/s}$ e $m_\psi(\omega_A^*) := 180^\circ + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $45^\circ \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 50^\circ$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze fino a far sì che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 10^3 \text{ rad/s}$ e di sollevare la fase di almeno 5° . A tal fine basta portare il guadagno di Bode dal valore 26.0206 dB al valore 40 dB, ovvero da 20 a 100, cancellare il polo in -1000 rad/s e sostituirlo, ad esempio, con un polo in -10000 . In tal modo la pulsazione di attraversamento è quella desiderata e il margine di fase è quasi 90° . Questa soluzione corrisponde a

$$C(s) = 100 \frac{1 + 0.001s}{1 + 0.0001s}$$

e porta ai seguenti diagrammi di Bode:

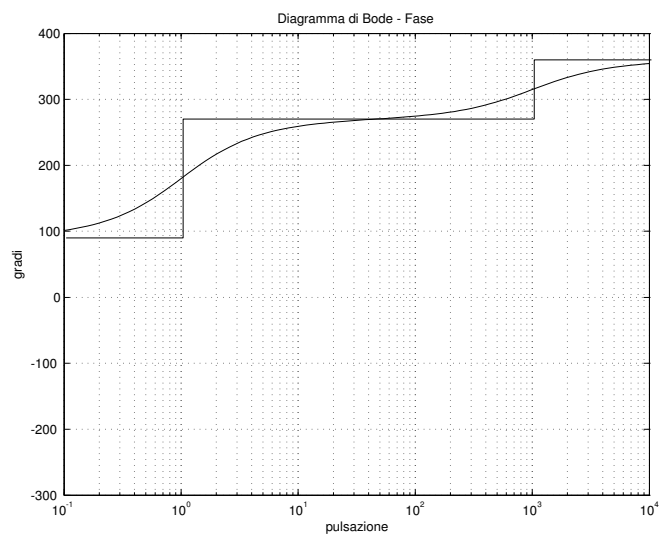
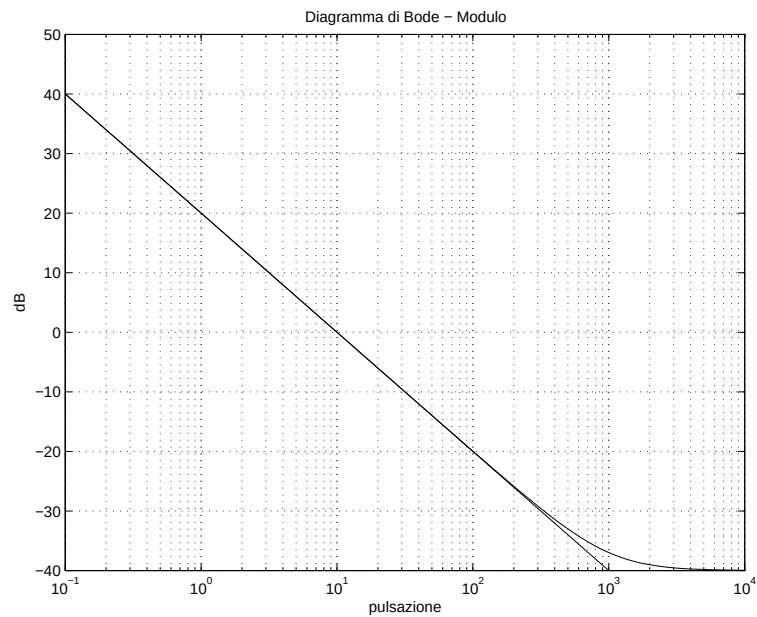


Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

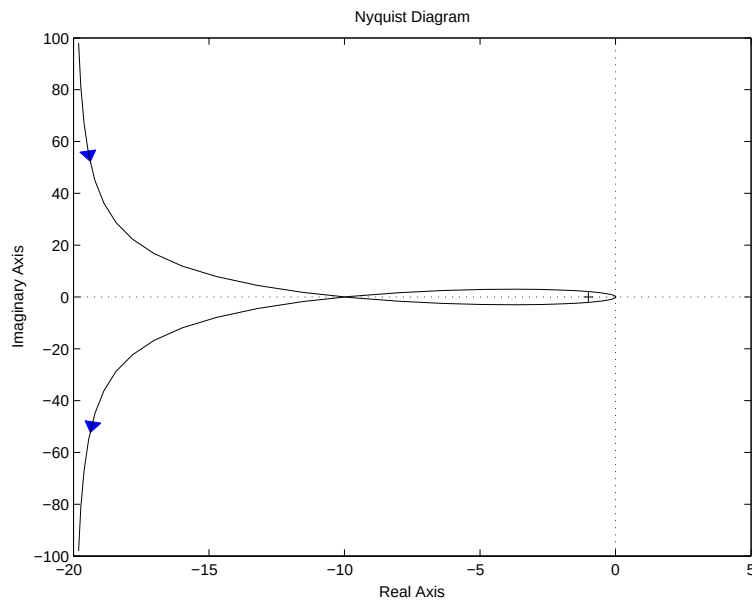
$$G(s) = 0.01 \frac{(s + 1000)(s + 1)}{s(s - 1)} = -10 \frac{(1 + s)(1 + 10^{-3}s)}{s(1 - s)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta uno polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale negativo con $1/T'_1 = 1000$ e $\mu'_1 = 1$, uno zero reale negativo con $1/T'_2 = 1$ e $\mu'_2 = 1$, un polo reale positivo con $1/T = -1$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei

diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.



ii) [4.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Una valutazione del punto di intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo evidenzia come tale punto si trovi in $-10 + j0$ e quindi alla sinistra di $-1 + j0$ (lo si vede già dai diagrammi di Bode). Ciò assicura che una volta riportato al finito il diagramma di Nyquist attraverso un percorso di Nyquist modificato compia un giro in verso antiorario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 1$. Poichè $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, e un polo semplice nell'origine, la condizione $N = 1$ assicura $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile.

Test. [10 punti] 1C 2 B 3 A 4 A 5 A.

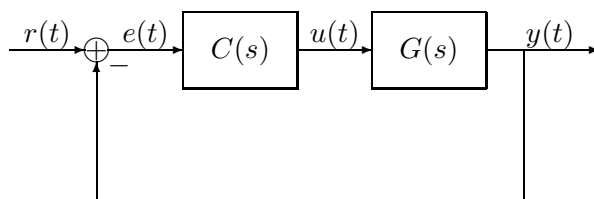
TEMA D - A.A. 2003/2004

Esercizio 1. Dato il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.01}{(s + 0.01)(s + 1)}$$

- i) si determini la risposta al gradino del sistema, e se ne valuti, almeno in modo approssimativo, tempo di salita, e, se esistono, tempo di assestamento e sovraelongazione;
- ii) si determini il tipo del sistema e il relativo errore di regime permanente.

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



- iii) si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato
 - 1) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) al più pari ad 0.05;
 e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,
 - 2) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 1$ rad/sec;
 - 3) abbia margine di fase pari almeno a 50° .

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 0.1 \frac{(s + 100)(s + 1)}{s(s - 1)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

- i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$;
- ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$ e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{0.01}{s(s+0.01)(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{100}{99} \frac{1}{s+0.01} + \frac{1}{99} \frac{1}{s+1}$$

e corrisponde al segnale

$$y(t) = \left[1 - \frac{100}{99} e^{-0.01t} + \frac{1}{99} e^{-t} \right] \delta_{-1}(t).$$

La sua derivata vale per $t > 0$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{99} e^{-0.01t} - \frac{1}{99} e^{-t}.$$

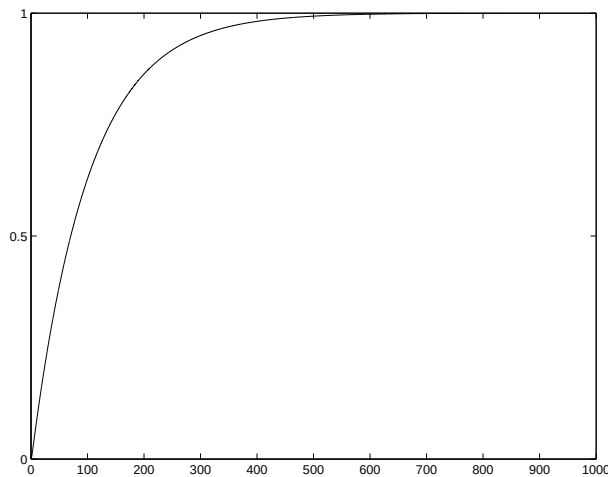
Chiaramente tale derivata è sempre non negativa e si annulla solo per $t = 0$, e pertanto la risposta al gradino ha un andamento monotono crescente. Non esiste sovraelongazione e tempo di salita e di assestamento coincidono e si trovano imponendo

$$y(t_r) = 0.9y(+\infty) = 0.9.$$

Poiché dei due esponenziali uno è a decadimento rapidissimo, nella valutazione del tempo di salita possiamo ricorrere all'espressione approssimata della risposta al gradino:

$$y(t) \approx \left[1 - \frac{100}{99} e^{-0.01t} \right] \delta_{-1}(t).$$

Si trova, quindi, $t_r \approx 100 \cdot \ln 10 = 230$ s. Il grafico della risposta al gradino è il seguente:



ii) [4 punti] È immediato rendersi conto del fatto che $G(0) = 1$ e quindi il sistema è almeno di tipo 1. Il calcolo di $\frac{dG(0)}{ds}$ fornisce

$$\left. \frac{dG}{ds} \right|_{s=0} = - \frac{0.01}{(s+1)^2(s+0.01)^2} \cdot (2s+1.01) \Big|_{s=0} = - \frac{0.01 \cdot 1.01}{(0.01)^2} = -101.$$

Pertanto, il sistema è di tipo 1 e risponde alla rampa lineare unitaria con il segnale in regime permanente

$$y_{rp}(t) = [t - 101]\delta_{-1}(t)$$

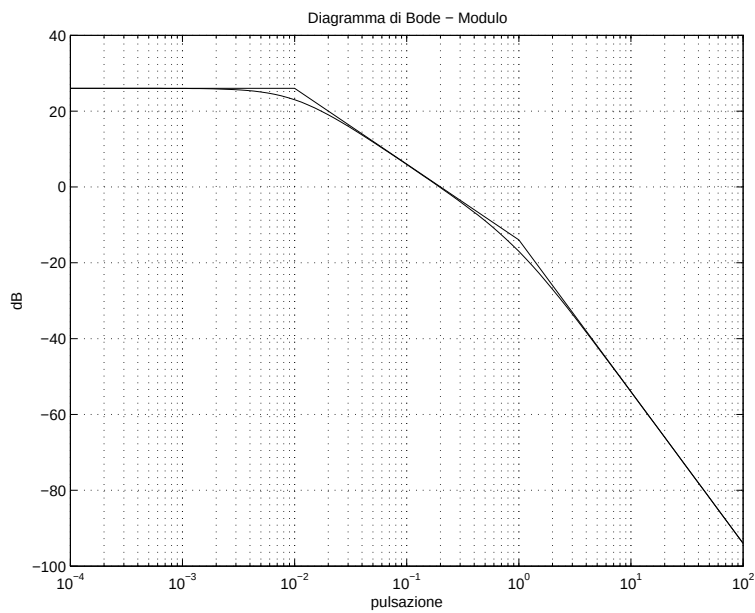
e l'errore di regime permanente è $e_{rp} = 101$.

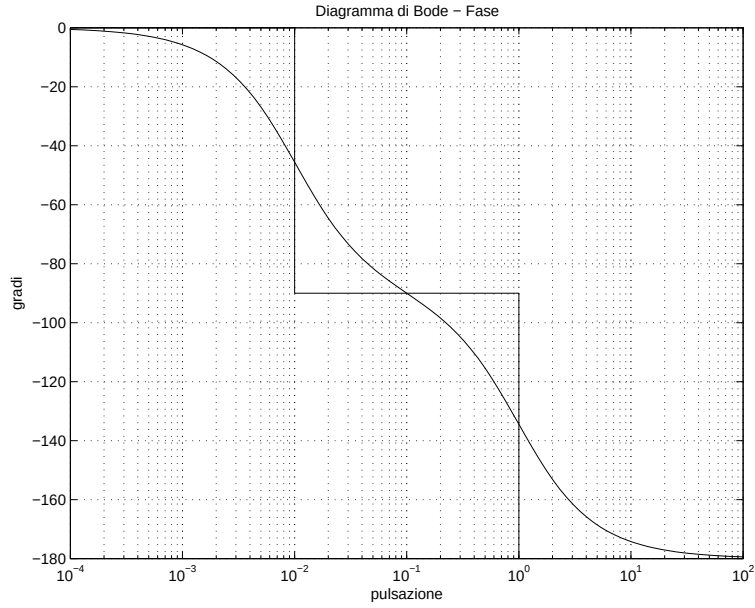
iii) [4 punti] Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \leq 0.05$$

da cui segue $K_B(C) \geq 19$. Prendiamo $K_B(C) = 20$ a cui corrisponde $C'(s) = 20$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:

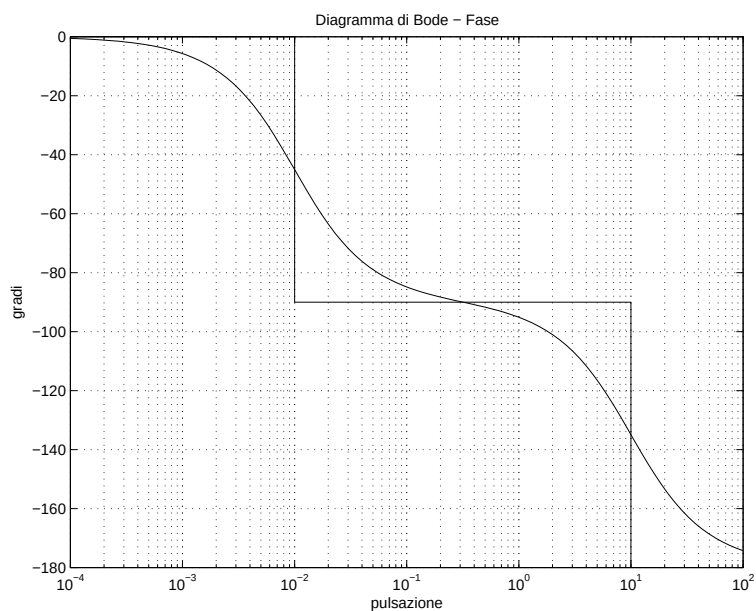
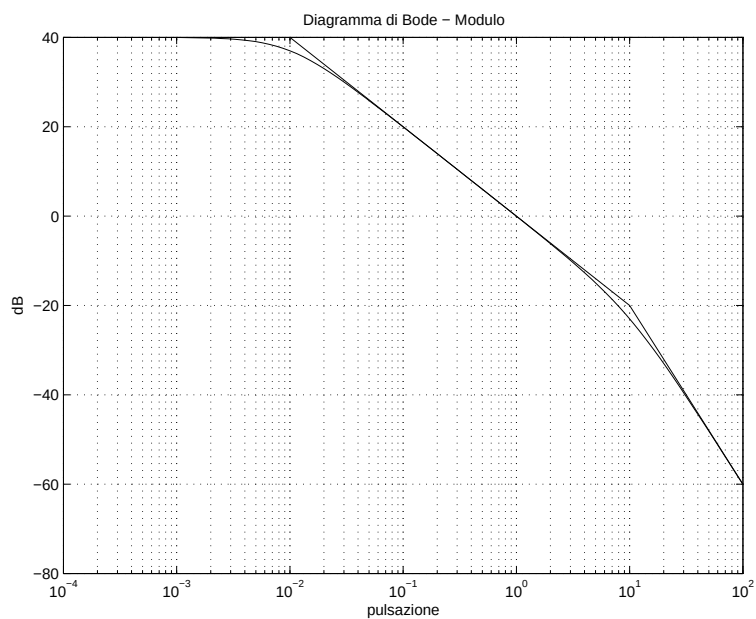




Si trova $0.2 \text{ rad/s} \approx \omega_A < \omega_A^* = 1 \text{ rad/s}$ e $m_\psi(\omega_A^*) := 180^\circ + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $45^\circ \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 50^\circ$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze fino a far sì che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 100 \text{ rad/s}$ e di sollevare la fase di almeno 5° . A tal fine basta portare il guadagno di Bode dal valore 26.0206 dB al valore 40 dB, ovvero da 20 a 100, cancellare il polo in -1 rad/s e sostituirlo, ad esempio, con un polo in -10 . In tal modo la pulsazione di attraversamento è quella desiderata e il margine di fase è quasi 90° . Questa soluzione corrisponde a

$$C(s) = 100 \frac{1+s}{1+0.1s}$$

e porta ai seguenti diagrammi di Bode:

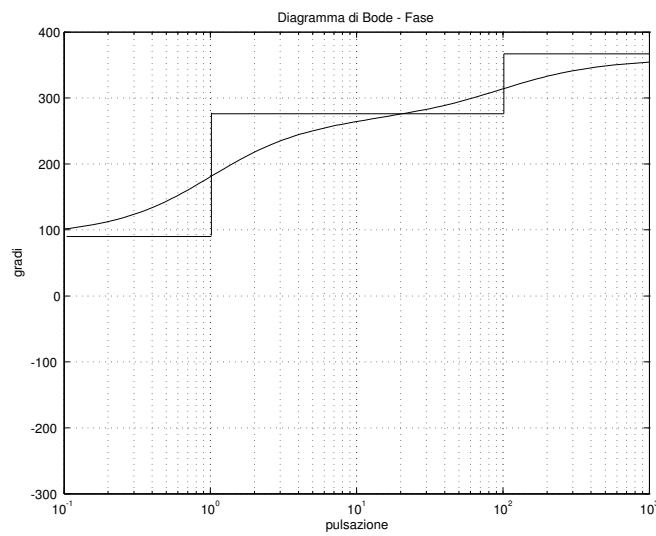
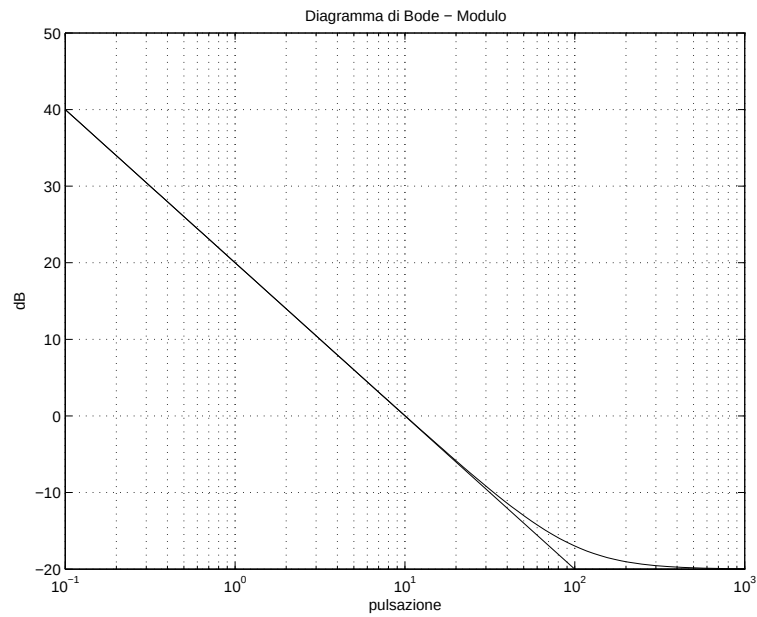


Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

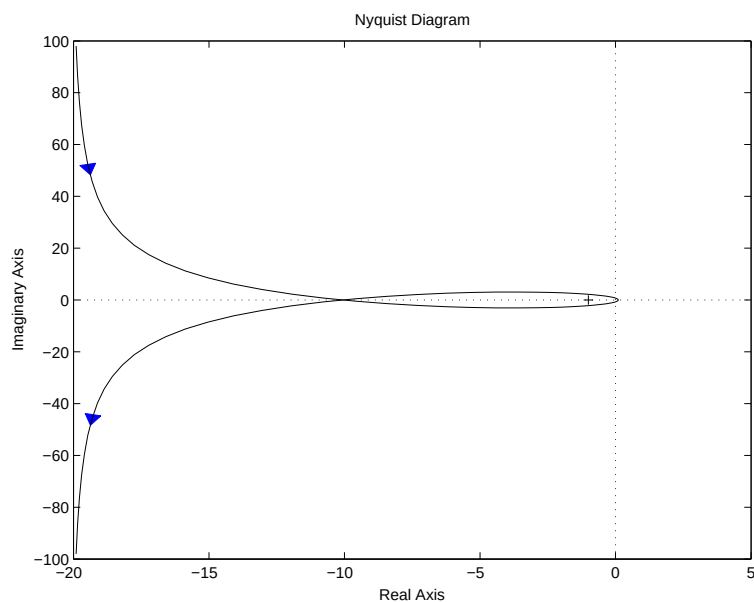
$$G(s) = 0.1 \frac{(s + 100)(s + 1)}{s(s - 1)} = -10 \frac{(1 + s)(1 + 10^{-2}s)}{s(1 - s)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta uno polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale negativo con $1/T'_1 = 100$ e $\mu'_1 = 1$, uno zero reale negativo con $1/T'_2 = 1$ e $\mu'_2 = 1$, un polo reale positivo con $1/T = -1$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi

di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.



ii) [4.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Una valutazione del punto di intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo evidenzia come tale punto si trovi in $-10 + j0$ e quindi alla sinistra di $-1 + j0$ (lo si vede già dai diagrammi di Bode). Ciò assicura che una volta riportato al finito il diagramma di Nyquist attraverso un percorso di Nyquist modificato compia un giro in verso antiorario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 1$. Poichè $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, e un polo semplice nell'origine, la condizione $N = 1$ assicura $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile.

Test. [10 punti] 1 C 2 A 3 C 4 B 5 B.