COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
21 Settembre 2004

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (2+a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1+a)\frac{dy(t)}{dt} + (a-a^2)y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$

ii) Si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t)$.

iii) Si determini, se esiste, la risposta forzata di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = \cos(2t)\ \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. [VECCHIO ORDINAMENTO] Consideriamo il sistema lineare e tempo invariante a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - \frac{3a}{2}y(t-1) + \frac{a^2}{2}y(t-2) = u(t) - u(t-2), \qquad t \in \mathbb{Z}_+.$$

i) Determinare l'espressione dei modi del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) studiare la stabilità asintotica del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

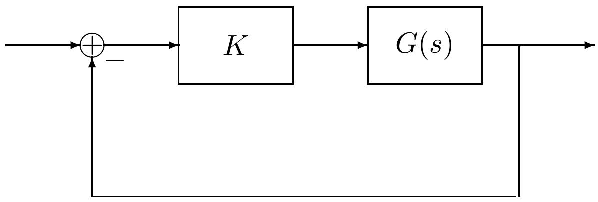
iii) trovare, se esiste, un valore di a per cui i modi dell'evoluzione libera sono di tipo sinusoidale e in caso affermativo, per tale valore di a, determinare l'espressione dell'evoluzione libera a partire da condizioni iniziali $y(-1) = 1/4$ e $y(-2) = -1$.

Esercizio 2. [NUOVO ORDINAMENTO] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{(s+0.1)(s-100)}{s(s^2+100)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

ii) Si supponga di applicare al precedente sistema un controllo in retroazione (unitaria negativa) sulla cui catena di azione diretta agisca un controllore proporzionale K come illustrato in figura:



Si studi la stabilità BIBO del sistema retroazionato al variare di K in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s-1}{(s^2+1)(s+10)}.$$

i) Si valuti la risposta (forzata) in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta(t) + 10\delta_{-1}(t).$$

ii) Si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$ di tipo proporzionale, e quindi con la seguente struttura

$$C(s) = K_p,$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato di funzione di trasferimento $W(s)$ sia BIBO stabile e risponda, in evoluzione forzata e in condizioni di regime permanente, al gradino unitario $u(t) = \delta_{-1}(t)$ con il gradino unitario "rovesciato" $y_{rp}(t) = -\delta_{-1}(t)$.

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti, si definiscano i concetti di stabilità asintotica e di stabilità BIBO e si dimostri, operando sia nel dominio del tempo che nel dominio delle trasformate di Laplace, che la stabilità asintotica implica la stabilità BIBO.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [6 punti] Equazione caratteristica è

$$0 = (s + a)(s^2 + 2s + 1 - a).$$

Asintotica stabilita' con Routh: per $0 < a < 1$. BIBO stabilità: oltre ai casi in cui c'e' asintotica stabilità anche per $a = -1$ e $a = 4$ e in nessun altro caso. Per quei valori di a (e per essi soli), infatti, ha luogo una cancellazione polo-zero che lascia i rimamenti zeri al denominatore nel semipiano reale negativo.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s-1}{s(s+1)^2}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $W(s)$ porta a

$$W(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$w(t) = -\delta_{-1}(t) + [1 + 2t]e^{-t}\ \delta_{-1}(t).$$

iii) [2 punti] Non esiste perchè il sistema non è BIBO stabile.

Esercizio 2. [VECCHIO ORDINAMENTO] i) [2.5 punti] Equazione caratteristica per $a \neq 0$

$$0 = z^2 - \frac{3a}{2}z + \frac{a^2}{2} = (z - a)\left(z - \frac{a}{2}\right)$$

ha due zeri $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = a/2$. I modi sono

$$a^t \qquad \left(\frac{a}{2}\right)^t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Per $a = 0$ l'equazione caratteristica è

$$z^2 = 0$$

e il sistema presenta i modi $\delta(t), \delta(t-1)$.

ii) [2 punti] Stabilità asintotica se e solo se $|a| < 1$ e $|\frac{a}{2}| < 1$, ovvero per $-1 < a < 1$.

iii) [3 punti] I modi dell'evoluzione libera sono di tipo sinusoidale se e solo se l'equazione caratteristica del sistema ha due zeri del tipo $\pm e^{j\theta}$. Questo è il caso se e solo se esiste $a \in \mathbb{R}$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tali che

$$z^2 - \frac{3a}{2}z + \frac{a^2}{2} = (z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta}) = z^2 - 2\cos\theta z + 1.$$

Per $a = \pm\sqrt{2}$ il termine noto dell'equazione caratteristica diventa unitario, tuttavia l'equazione

$$\pm\frac{3\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = 2\cos\theta$$

non ha soluzioni, dal momento che per ogni scelta di θ

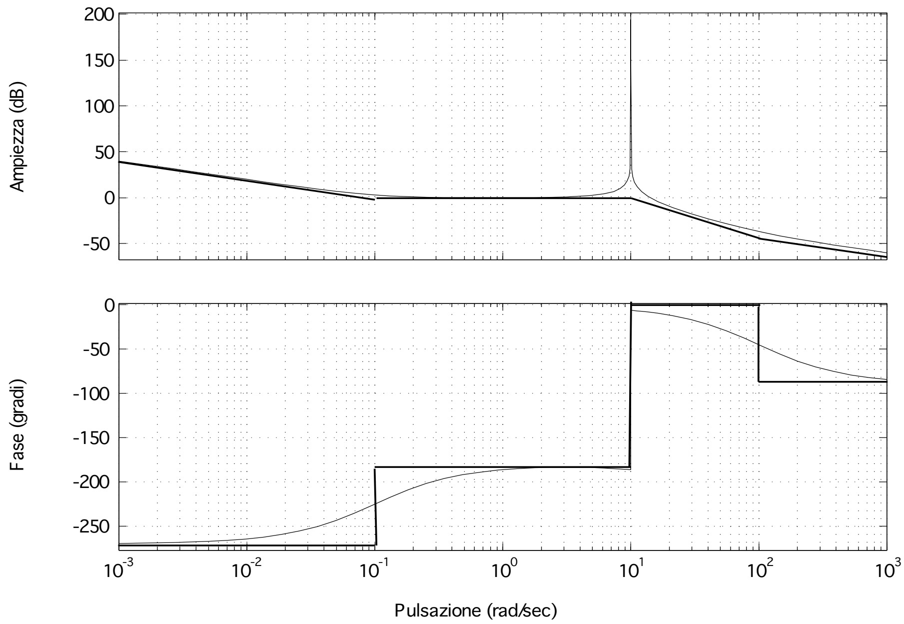
$$|\cos\theta| \leq 1 < \left|\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Una soluzione più semplice consiste nel riscontrare che per ogni scelta di $a \neq 0$ i due autovalori hanno l'uno modulo il doppio dell'altro e quindi non potranno mai essere due valori complessi coniugati di modulo unitario.

Esercizio 2. [NUOVO ORDINAMENTO] i) [5 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$G(s) = -0.1\ \frac{(1+10s)(1-0.01s)}{s\,(1+0.01s^2)}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento ha guadagno di Bode -0.1 (ovvero $|K_B|_{\text{dB}} = -20$ dB e $\arg(K_B) = -180^o$). I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi presentano inoltre tre punti di spezzamento: uno corrispondente ad uno zero reale negativo in -10^{-1}, uno corrispondente ad uno zero reale positivo in 100 ed uno corrispondente ad una coppia di poli immaginari puri, complessi coniugati, collocati in $\pm j10$ (ovvero un termine trinomio con pulsazione naturale $\omega_n = 10$ rad/sec e coefficiente di smorzamento $\xi = 0$). Oltre a questi termini, inoltre, bisogna tener conto del polo semplice nell'origine, che fa partire il diagramma delle ampiezze con pendenza -20 dB/decade e dà un ulteriore contributo di -90^o al diagramma delle fasi (che parte, pertanto, dal valore -270^o). Il risultato è illustrato in figura.



ii) [2.5 punti] La funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa è

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K\frac{(s+0.1)(s-100)}{s(s^2+100)}}{1+K\frac{(s+0.1)(s-100)}{s(s^2+100)}} = \frac{K(s+0.1)(s-100)}{s(s^2+100)+K(s+0.1)(s-100)}.$$

Poichè la rappresentazione così ottenuta per la funzione di trasferimento del sistema in retroazione è coprima, tale sistema risulterà BIBO stabile se e solo se il polinomio al denominatore

$$d(s) = s(s^2+100) + K(s+0.1)(s-100) = s^3 + Ks^2 + (100-99.9K)s - 10K$$

è di Hurwitz.

Senza nemmeno applicare la tabella di Routh, ma semplicemente avvalendoci del fatto che condizione necessaria affinchè un polinomio sia di Hurwitz è che i suoi coefficienti abbiano tutti il medesimo segno, possiamo immediatamente notare che il coefficiente del termine di grado 2 e quello del termine di grado 0 hanno sempre segno opposto. Pertanto, per nessun valore di K il polinomio $d(s)$ sarà di Hurwitz e, di conseguenza, il sistema retroazionato non sarà mai BIBO stabile.

Esercizio 3. i) [2.5 punti] Operando necessariamente nel dominio delle trasformate, andiamo a valutare, innanzitutto, la trasformata di Laplace del segnale di ingresso $u(t) = \delta(t) + 10\delta_{-1}(t)$. Si trova

$$U(s) = 1 + \frac{10}{s} = \frac{s+10}{s},$$

e quindi la risposta forzata in uscita ha trasformata di Laplace

$$Y_f(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{(s^2+1)(s+10)} \cdot \frac{s+10}{s} = \frac{s-1}{s(s^2+1)}.$$

Sviluppando in fratti semplici $Y_f(s)$ si ottiene

$$Y_f(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s+1}{s^2+1} = -\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Antitrasformando si ottiene

$$y_f(t) = (-1 + \cos t + \sin t)\delta_{-1}(t).$$

ii) [4 punti] In corrispondenza ad un controllore del tipo $C(s) = K_p$, la funzione di trasferimento del sistema retroazionato diventa

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{K_pG(s)}{1+K_pG(s)} = \frac{K_p(s-1)}{(s^2+1)(s+10)+K_p(s-1)} \\ &= \frac{K_p(s-1)}{s^3+10s^2+(K_p+1)s+(10-K_p)}. \end{aligned}$$

Poichè la rappresentazione così ottenuta per la funzione di trasferimento del sistema in retroazione è coprima, tale sistema risulterà BIBO stabile se e solo se il polinomio al denominatore

$$d(s) = s^3 + 10s^2 + (K_p+1)s + (10-K_p)$$

è di Hurwitz. Applicando la tabella di Routh otteniamo

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K_p+1 \\ 2 & 10 & 10-K_p \\ 1 & \frac{11}{10}K_p & 0 \\ 0 & 10-K_p & 0 \end{array}$$

È immediato rendersi conto del fatto che la prima colonna della tabella ha tutti gli elementi di ugual segno (positivo) se e solo se $0 < K_p < 10$. In tal caso il polinomio è di Hurwitz. In tutti gli altri casi, invece, ha almeno uno zero nel semipiano $\mathrm{Re}(s) \geq 0$. La funzione di trasferimento $W(s)$ soddisfa il vincolo posto sulla risposta di regime permanente al gradino se e solo se $W(0) = -1$. Imponendo il soddisfacimento di tale vincolo si trova

$$W(0) = \frac{-K_p}{10-K_p} = -1,$$

ovvero $K_p = 5$, valore compatibile con il range di valori per cui si ha BIBO stabilità.

Teoria. [5 punti] Si veda i Capitoli 2 e 3 del libro di testo.