COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
7 Settembre 2004 - A.A. 2003/2004

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 11a\frac{dy(t)}{dt} + 10a^2y(t) = 10\frac{du(t)}{dt} + 10u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con a parametro reale.

i) Si determinino, al variare di a in $\mathbb{R}$, i modi elementari del sistema e se ne studi il carattere (convergente/limitato/divergente).

ii) Si determinino, al variare di a in $\mathbb{R}$, le condizioni iniziali

$$y(0^-) \qquad \text{e} \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-}$$

a cui corrisponde un'evoluzione libera che è un singolo esponenziale convergente.

iii) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la risposta impulsiva del sistema.

iv) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la risposta forzata del sistema al segnale in ingresso

$$u(t) = \delta(t) - 9ae^{at}\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1-s}{(1+10s)(1+0.1s)}.$$

i) Se ne traccino i diagrammi di Bode e di Nyquist e si determini, attraverso il criterio di Nyquist, l'eventuale numero di poli a parte reale positiva del sistema

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)},$$

ottenuto da $G(s)$ per retroazione unitaria negativa.

ii) Si progetti un controllore $C(s)$ di tipo P, ovvero

$$C(s) = K_p,$$

(SUGGERIMENTO: di valore intero) in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia BIBO stabile con poli complessi coniugati e fattore di smorzamento $\xi = 0.35$.

Esercizio 3. Si consideri un sistema del primo ordine, descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT},$$

con K e T parametri reali positivi. Si determini i valori di tali parametri sapendo che

- il tempo di salita al 10% della risposta al gradino del sistema è $t_r = 23.0259$ secondi;
- il sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa a partire dal sistema $G(s)$ ha banda passante a 3 dB pari a 0.5 rad/secondi.

Teoria. Dato un sistema lineare e tempo invariante a tempo continuo di funzione di trasferimento propria $W(s)$, si definiscano i concetti di "tipo" e relativo "errore di regime permanente" del sistema. Supponendo, poi, che $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$, si dimostri che il tipo del sistema retroazionato $W(s)$ coincide con la molteplicità del polo nell'origine della funzione di trasferimento $G(s)$. [Suggerimento: si supponga nota la caratterizzazione del tipo del sistema $W(s)$ in termini di $W(0), dW(0)/ds, ...$].

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^2 - 11as + 10a^2 = (s - 10a)(s - a)$$

e quindi ha come zeri $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = 10a$. Distinguiamo, dal punto di vista della "struttura" dei modi, due casi:

- $a = 0$;
- $a \neq 0$.

Nel primo caso, l'equazione caratteristica presenta un solo zero in 0 di molteplicità 2. I modi elementari ad esso associati sono

$$1 \qquad \text{e} \qquad t,$$

il primo dei quali limitato (ma non convergente), il secondo divergente. Per $a \neq 0$ è immediato rendersi conto del fatto che l'equazione caratteristica presenta 2 radici distinte, ovvero $\lambda_1 \neq \lambda_2$. In tal caso abbiamo due modi elementari distinti:

$$e^{at} \qquad \text{e} \qquad e^{10at}.$$

Tali modi sono entrambi convergenti per $a < 0$ e entrambi divergenti per $a > 0$.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 t, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

è quindi non potrà mai essere un'esponenziale convergente. Per $a \neq 0$ l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{at} + c_2 e^{10at}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Affinché essa sia un'esponenziale convergente occorre e basta che $a < 0$ e uno (almeno) tra c_1 e c_2 sia nullo. Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} y(0^-) &= y_\ell(0^-) = c_1 + c_2, \\ \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} &= \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = ac_1 + 10ac_2, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che le condizioni iniziali che corrispondono alla soluzione del problema sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(0^-) \in \mathbb{R}, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = ay(0^-),$$

situazione corrispondente al caso in cui $c_2 = 0$, e quelle del tipo

$$y(0^-) \in \mathbb{R}, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = 10ay(0^-),$$

situazione corrispondente al caso in cui $c_1 = 0$.

iii) [4 punti] La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{10s + 10}{s^2 - 11as + 10a^2} = 10\,\frac{s+1}{(s-a)(s-10a)}.$$

Distinguiamo, anche in questo caso, il caso $a = 0$ dal caso $a \neq 0$. Per $a = 0$ si trova

$$W(s) = 10\,\frac{s+1}{s^2} = 10\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right),$$

la cui antitrasformata, che altro non è che la risposta impulsiva del sistema, è

$$w(t) = 10\,(1+t)\,\delta_{-1}(t).$$

Nel caso $a \neq 0$, invece, distinguiamo i sottocasi $a = -0.1$ e $a = -1$, in corrispondenza ai quali si realizza una semplificazione tra numeratore e denominatore, dai rimanenti. Per $a = -0.1$ si ha

$$W(s) = \frac{10}{s + 0.1},$$

la cui antitrasformata è

$$w(t) = 10e^{-t/10}\delta_{-1}(t).$$

Per $a = -1$ si ha

$$W(s) = \frac{10}{s + 10},$$

la cui antitrasformata è

$$w(t) = 10e^{-10t}\delta_{-1}(t).$$

Infine, per $a \neq 0, -0.1, -1$ lo sviluppo in fratti semplici di $W(s)$ porta a

$$W(s) = 10\left(-\frac{1+a}{9a}\frac{1}{s-a} + \frac{10a+1}{9a}\frac{1}{s-10a}\right),$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$w(t) = 10\left(-\frac{1+a}{9a}e^{at} + \frac{10a+1}{9a}e^{10at}\right)\delta_{-1}(t).$$

iv) [3 punti] Facendo uso della trasformata di Laplace otteniamo

$$U(s) = 1 - 9a\,\frac{1}{s-a} = \frac{s-10a}{s-a}$$

e, quindi,

$$Y(s) = W(s)U(s) = 10\frac{s+1}{(s-a)^2}.$$

Distinguiamo due casi:

- $a = -1$;
- $a \neq -1$.

Nel primo caso la $Y(s)$ si può riscrivere in forma semplificata come

$$Y(s) = \frac{10}{s+1}$$

e corrisponde a $y(t) = 10e^{-t}\delta_{-1}(t)$. Nel secondo caso lo sviluppo in frazioni parziali di $Y(s)$ restituisce

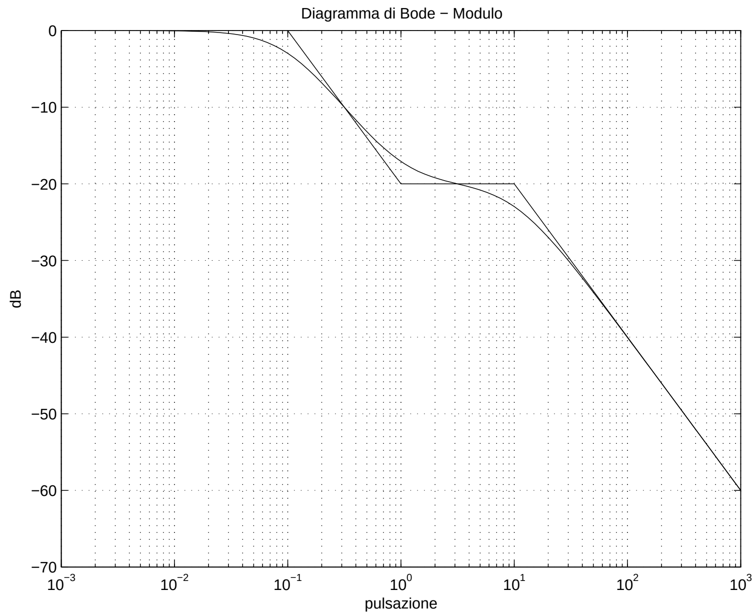
$$Y(s) = 10\,\frac{(s-a)+(1+a)}{(s-a)^2} = \frac{10}{s-a} + 10\,\frac{1+a}{(s-a)^2}$$

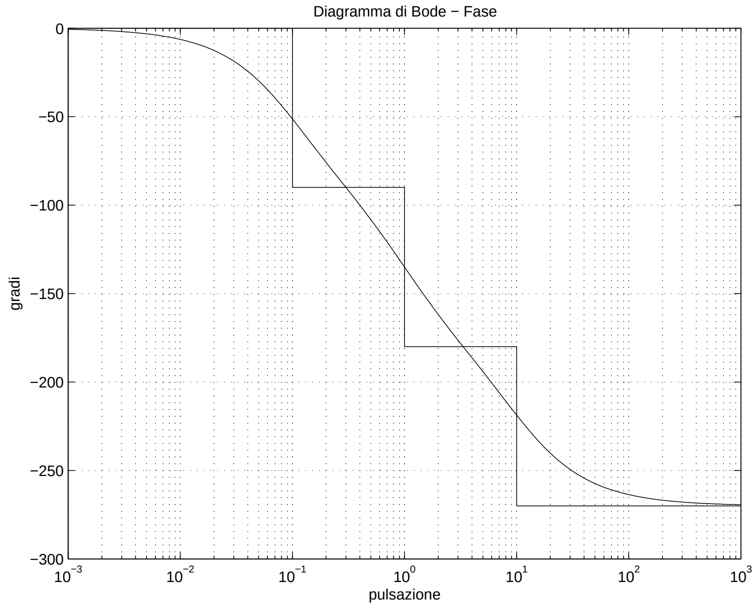
da cui si ottiene

$$y(t) = 10\,[1 + (1+a)t]\,e^{at}\delta_{-1}(t).$$

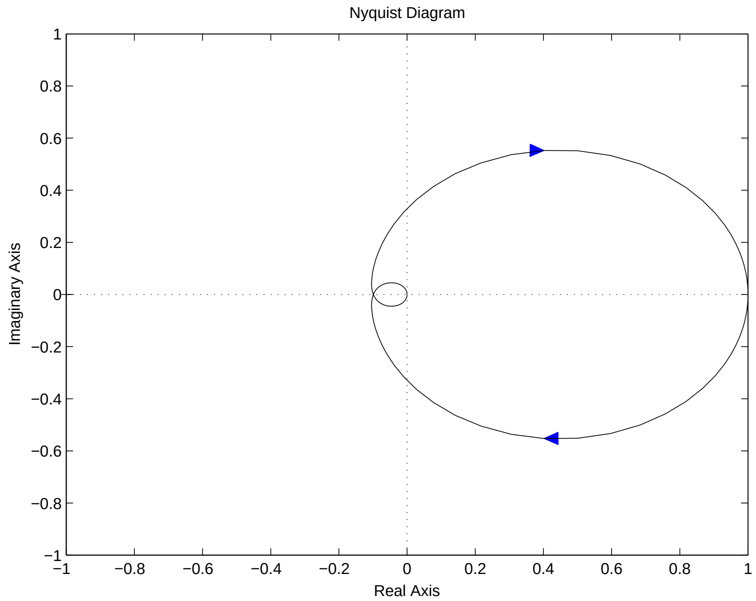
Si vede come, in realtà, la seconda espressione sia del tutto generale e valga anche per $a = -1$.

Esercizio 2. i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento è già in forma di Bode e presenta uno zero reale positivo con $1/T' = -1$ e $\mu' = 1$, uno polo reale negativo con $1/T_1 = 10$ e $\mu_1 = 1$, un polo reale negativo con $1/T_2 = 0.1$ e $\mu_2 = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Chiaramente $n_{G+} = 0$ ed essendo l'intersezione con il semiasse reale negativo alla destra di -1, ne consegue che $N = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile e $n_{W+} = 0$.

ii) [4 punti] È immediato verificare che

$$W(s) = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p G(s)} = \frac{K_p(1-s)}{(1+10s)(1+0.1s) + K_p(1-s)} = \frac{K_p(1-s)}{(1+K_p) + (10.1 - K_p)s + s^2}.$$

Pertanto, il sistema retroazionato è BIBO stabile (in base alla regola dei segni di Cartesio) se e solo se

$$-1 < K_p < 10.1.$$

Se voglio scegliere K_p in modo che il sistema retroazionato abbia poli complessi coniugati con $\xi = 0.35$ devo interpretare il polinomio al denominatore della $W(s)$ nella forma

$$(1 + K_p) + (10.1 - K_p)s + s^2 = \omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2,$$

dove ω_n è la pulsazione naturale della coppia di poli e ξ lo smorzamento, che voglio pari a 0.35. Imponendo, allora

$$0.35 = \xi = \frac{1}{2}\,\frac{2\xi\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{10.1 - K_p}{\sqrt{1 + K_p}},$$

si vede che nell'intervallo $(-1, 10.1)$ la soluzione intera $K_p = 8$ soddisfa il requisito.

Esercizio 3. [3 punti] Poiché si tratta di un sistema del primo ordine, il tempo di salita del sistema coincide con

$$t_r = \frac{\ln 10}{\frac{1}{T}} = T \ln 10,$$

pertanto

$$T = \frac{t_r}{\ln 10} = \frac{23.0259}{\ln 10} = 10.$$

Il sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa ha funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{(1 + K) + sT} = \frac{K}{T}\,\frac{1}{s + \frac{K+1}{T}}.$$

Esso è un sistema del primo ordine con un polo reale negativo collocato in $-\frac{K+1}{T} =: -p$. Poiché la sua banda passante B_p coincide proprio con p, ne consegue che

$$0.5 \text{ rad/secondi} = B_p = p = \frac{K + 1}{T} = \frac{K + 1}{10}.$$

Pertanto $K = 4$.

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, Capitolo 6 pagina 141 e seguenti, e Capitolo 8, pagina 200 e seguenti.