COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
7 Gennaio 2003

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$y(t) - \left(\frac{1}{2} + a\right) y(t-1) + \frac{a}{2} y(t-2) = u(t) - u(t-1), \qquad t \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a è un parametro reale.

i) Calcolare, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'uscita in evoluzione libera del sistema in corrispondenza a $y(-1) = 2a$ e $y(-2) = 4a$.

ii) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la risposta impulsiva del sistema $w_a(t)$.

iii) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \pi^2 y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si determini, operando nel dominio del tempo, la risposta impulsiva del sistema, $w(t)$;

ii) si determini la risposta (forzata) del sistema in corrispondenza alla sollecitazione in ingresso

$$u(t) = \delta(t) + \delta_{-1}(t).$$

iii) Si determini, se esiste, la risposta di regime permanente al segnale di ingresso $u(t) = (\pi + \cos t)\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 3. Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$

i) se ne tracci il diagramma di Nyquist (per $\omega \geq 0$) evidenziando, se esistono, pulsazione di attraversamento e margine di fase. Di tali parametri si valuti (almeno approssimativamente) il valore numerico.

ii) Si progetti un controllore PD (proporzionale derivativo) $C(s)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato

   a) sia di tipo 1 con errore di regime permanente pari, all'incirca, a 0.01;

   b) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 1000$ rad/sec;

   c) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

iii) Supponendo di applicare un'azione di controllo puramente proporzionale $C(s) = K, K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nella catena di azione diretta, si studi al variare di K la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, facendo uso della tabella di Routh.

Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discuta le possibili estensioni.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è:

$$z^2 - \left(\frac{1}{2} + a\right) z + \frac{a}{2} = \left(z - \frac{1}{2}\right)(z - a) = 0,$$

e quindi presenta due zeri (eventualmente coincidenti), collocati in a e $1/2$. Distinguiamo tre casi:

- $a = 0$;
- $a = 1/2$;
- $a \neq 0, 1/2$.

Per $a = 0$ tali zeri sono distinti e i modi elementari associati al sistema sono $\frac{1}{2^t}$ e l'impulso $\delta(t+2)$. Tuttavia per $a = 0$ le condizioni iniziali sono entrambe nulle, per cui l'evoluzione libera risulta identicamente nulla.

Per $a = 1/2$ abbiamo due zeri coincidenti, ovvero uno zero in $1/2$ di molteplicità 2, e due modi elementari: $\frac{1}{2^t}$ e $t \cdot \frac{1}{2^t}$. Pertanto per $t \geq -2$ l'evoluzione libera è espressa dalla formula

$$y_\ell(t) = c_1 \ \frac{1}{2^t} + c_2 \ t \cdot \frac{1}{2^t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(-1) = 1, y(-2) = 2$ si trova $c_1 = 1/2$ e $c_2 = 0$.

Infine, per $a \neq 0, 1/2$, abbiamo due zeri distinti e due modi elementari: $\frac{1}{2^t}$ e a^t. Pertanto per $t \geq -2$ l'evoluzione libera è espressa dalla formula

$$y_\ell(t) = c_1 \ \frac{1}{2^t} + c_2 \ a^t.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(-1) = 2a, y(-2) = 4a$ si trova $c_1 = a$ e $c_2 = 0$.

ii) [4.5 punti] Anche in questo caso dobbiamo distinguere i tre casi di prima. Per $a = 0$ la risposta impulsiva assume la seguente espressione:

$$w_0(t) = d_1\delta(t) + d_2\delta(t-1) + d_3\frac{1}{2^t}\delta_{-1}(t-2).$$

Da una semplice riscrittura dell'equazione alle differenze del sistema in cui si sostituisca a $u(t)$ l'impulso $\delta(t)$ e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, segue immediatamente che

$$w_0(0) = 1, \qquad w_0(1) = -\frac{1}{2}, \qquad w_0(2) = -\frac{1}{4}.$$

Ciò assicura $d_1 = w_0(0) = 1, d_2 = w_0(1) = -1/2, d_3 = -1$.

Per $a = 1/2$, invece, la risposta impulsiva assume la seguente espressione:

$$w_{1/2}(t) = d_1\delta(t) + \left(d_2\frac{1}{2^t} + d_3 t \cdot \frac{1}{2^t}\right)\delta_{-1}(t-1).$$

Dalla riscrittura dell'equazione alle differenze del sistema in cui si sostituisca a $u(t)$ l'impulso $\delta(t)$ e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, segue che

$$w_{1/2}(0) = 1, \qquad w_{1/2}(1) = 0, \qquad w_{1/2}(2) = -\frac{1}{4}.$$

Ciò assicura $d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = -1$.

Infine, per $a \neq 0, 1/2$, la risposta impulsiva assume la seguente espressione:

$$w_a(t) = d_1\delta(t) + \left(d_2\frac{1}{2^t} + d_3a^t\right)\delta_{-1}(t-1).$$

Da

$$w_a(0) = 1, \qquad w_a(1) = a - \frac{1}{2}, \qquad w_a(2) = a^2 - \frac{a}{2} - \frac{1}{4}$$

segue

$$d_1 = 1, d_2 = \frac{1}{2(a-1/2)}, d_3 = \frac{a-1}{a-\frac{1}{2}}.$$

iii) [2 punti] Chiaramente il sistema risulta asintoticamente stabile se e solo se $|a| < 1$. Per tali valori del parametro a il sistema è pure BIBO stabile. Da un'analisi della risposta fornita alla precedente domanda emerge chiaramente che nel caso $a = 1$ la risposta impulsiva risulta sommabile e quindi c'è stabilità BIBO. In tutti gli altri casi non c'è stabilità BIBO.

Esercizio 2. i) [3.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^2 + \pi^2 = 0,$$

ed ha come radici caratteristiche

$$\lambda_{1,2} = \pm j\pi.$$

Pertanto l'equazione caratteristica ha due radici immaginarie coniugate entrambe semplici. I modi elementari associati a tali radici, di molteplicità 1, sono (in forma reale) $\cos(\pi t)$ e $\sin(\pi t)$, e quindi, tenuto conto del fatto che il sistema in esame è proprio ma non strettamente proprio (e quindi compare un impulso di Dirac nella risposta impulsiva), la risposta impulsiva assume la seguente espressione:

$$w(t) = d_0\delta(t) + [d_1\cos(\pi t) + d_2\sin(\pi t)]\,\delta_{-1}(t).$$

Per valutare il valore dei coefficienti d_0, d_1 e d_2, sfruttiamo la definizione di risposta impulsiva (ovvero di risposta in evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \delta(t)$) e, a tal fine, andiamo a valutare preliminarmente il valore della derivata prima e della derivata seconda di $w(t)$. Sfruttando la proprietà di campionamento dell'impulso, si trova:

$$\begin{aligned}
\frac{dw(t)}{dt} &= d_0\frac{d\delta(t)}{dt} + d_1\delta(t) + \Big[-d_1\pi\sin(\pi t) + d_2\pi\cos(\pi t)\Big]\delta_{-1}(t) \\
\frac{d^2w(t)}{dt^2} &= d_0\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + d_1\frac{d\delta(t)}{dt} + d_2\pi\delta(t) + \Big[-d_1\pi^2\cos(\pi t) - d_2\pi^2\sin(\pi t)\Big]\delta_{-1}(t).
\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza a $u(t)$ l'impulso di Dirac e a $y(t)$ la risposta impulsiva $w(t)$, si giunge al seguente sistema:

$$\begin{aligned}&\Big[d_0\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}+d_1\frac{d\delta(t)}{dt}+d_2\pi\delta(t)+\Big(-d_1\pi^2\cos(\pi t)-d_2\pi^2\sin(\pi t)\Big)\delta_{-1}(t)\Big]\\&+\pi^2\Big[d_0\delta(t)+\left[d_1\cos(\pi t)+d_2\sin(\pi t)\right]\delta_{-1}(t)\Big]\\&=\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}.\end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti dei segnali canonici $\delta_{-1}(t), \delta(t), \frac{d\delta(t)}{dt}$ e $\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}$ ai due membri, si ottiene:

$$d_0=1, \qquad d_1=0 \qquad \text{e} \qquad d_2\pi+\pi^2 d_0=0,$$

da cui segue

$$d_0=1, \qquad d_1=0 \qquad \text{e} \qquad d_2=-\pi.$$

Pertanto

$$w(t)=\delta(t)-\pi\sin(\pi t)\delta_{-1}(t).$$

ii) [3 punti] Per determinare $y_f(t)$ conviene lavorare nel dominio delle trasformate di Laplace. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s)=\frac{s^2}{s^2+\pi^2}$$

e poichè la trasformata del segnale di ingresso $u(t)$ è $U(s)=1+\frac{1}{s}=\frac{s+1}{s}$, la trasformata di Laplace della corrispondente uscita forzata è

$$Y_f(s)=\frac{s^2}{s^2+\pi^2}\frac{s+1}{s}=\frac{s(s+1)}{s^2+\pi^2}.$$

Osserviamo preliminarmente che tale funzione razionale è propria ma non strettamente propria. Dividendo numeratore per denominatore ottengo la riscrittura di $Y_f(s)$ nella forma

$$Y_f(s)=1+\frac{s-\pi^2}{s^2+\pi^2}=1+\frac{s}{s^2+\pi^2}-\pi\cdot\frac{\pi}{s^2+\pi^2}$$

ne consegue subito

$$y_f(t)=\delta(t)+\left(\cos(\pi t)-\pi\sin(\pi t)\right)\delta_{-1}(t).$$

iii) [1 punto] Il sistema non è BIBO stabile, per cui non ha senso parlare di risposta di regime permanente a tale segnale di ingresso.

Esercizio 3. i) [3 punti] Si trova

$$G(j\omega)=\frac{10}{j\omega(j\omega+10)}=-\frac{10j(10-j\omega)}{\omega(100+\omega^2)}=-\frac{10}{100+\omega^2}-j\frac{100}{\omega(100+\omega^2)},$$

da cui segue

$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}=-\frac{10}{100+\omega^2} \qquad \mathrm{Im}\{G(j\omega)\}=-\frac{100}{\omega(100+\omega^2)},$$

ed è immediato verificare che sia la parte reale che il coefficiente dell'immaginario assumono valori negativi per ogni valore di $\omega > 0$. Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}$ e $\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} &= -\frac{1}{10} \\
\lim_{\omega\to 0^+} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= -\infty \\
\lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= 0 \\
\lim_{\omega\to +\infty} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0.
\end{aligned}$$

Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\mathrm{arg}G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arg(10 + j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to 0^+} \arg\{G(j\omega)\} &= -90^o \\
\lim_{\omega\to +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= -180^o.
\end{aligned}$$

Il diagramma di Nyquist è riportato nella figura alla fine del file, in cui sono anche evidenziati pulsazione di attraversamento ω_A (che esiste ed è unica) e margine di fase m_ψ.

La valutazione numerica di tali parametri può essere fatta agevolmente a partire dal diagramma di Bode. È immediato verificare che la forma di Bode della funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{1}{s(1 + 0.1s)}.$$

Pertanto il guadagno di Bode è unitario e il tracciamento del diagramma di Bode è immediato. Tale diagramma di Bode è riportato qui sotto e in esso sono evidenziati margine di fase e pulsazione di attraversamento. La valutazione numerica di tali parametri a partire dai diagrammi di Bode porta ai seguenti valori $\omega_A \approx 1$ rad/sec, $m_\psi \approx 85^o$.

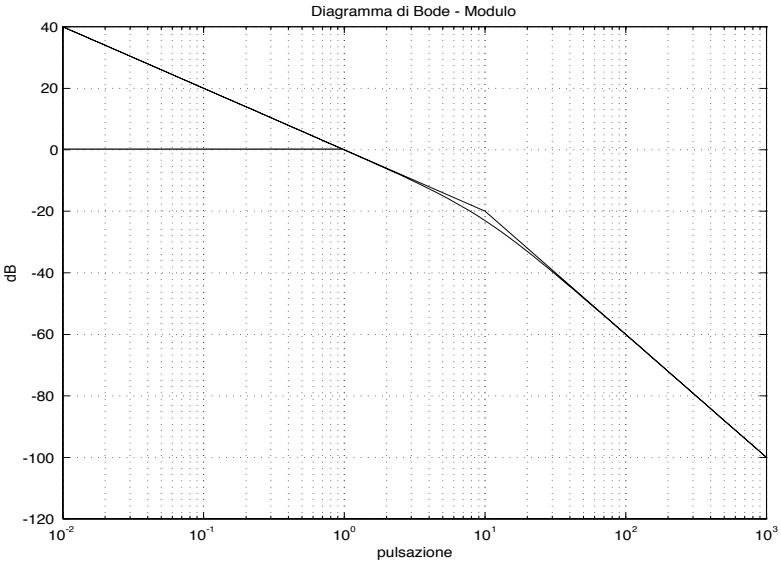
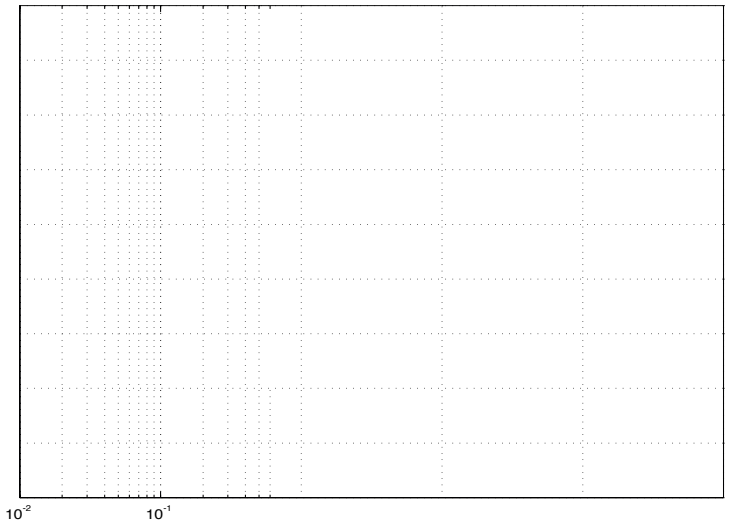


Diagramma di Bode - Modulo
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
dB
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
pulsazione


10^{-2}
10^{-1}