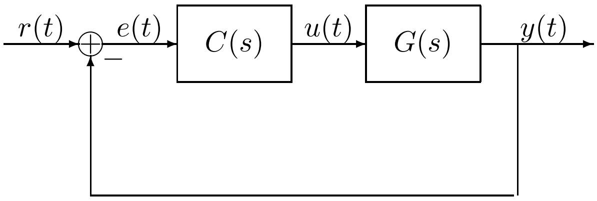
COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
TEMA A - 23 Giugno 2004

Esercizio 1. Dato il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25},$$

i) si determini la risposta al gradino del sistema, e se ne valuti (se esiste) la sovraelongazione.

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



ii) si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

1) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) al più pari ad 0.1;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

2) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 50$ rad/sec;

3) abbia margine di fase pari almeno a 70^o.

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 0.1 \; \frac{(s-100)(s+1)}{s(s-1)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$ e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{3}{4} + a - a^2\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{3}{4}(1-a)y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt},$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 1$:

ii) si determini l'insieme delle condizioni iniziali $y(0^-)$, $\frac{dy(0^-)}{dt}$, $\frac{d^2y(0^-)}{dt^2}$ a cui corrisponde un'evoluzione libera convergente a zero;

iii) si dica se esiste la risposta di regime permanente del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)\delta_{-1}(t)$$

e alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

In caso affermativo, la si calcoli.

iv) Si determini, se esiste, la sollecitazione di ingresso $u(t), t \geq 0$, che in evoluzione forzata produce il segnale di uscita

$$y(t) = y_f(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

Test. Selezionare la risposta corretta per ciascuna delle seguenti domande (ogni risposta esatta vale n punti, ogni risposta non data vale 0 punti, ogni risposta sbagliata vale - $n/3$ punti):

1. [1.5 punti] Dato un modello ingresso/uscita descritto da un'equazione differenziale del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} - (a_1 - 1)^2 y(t) = \frac{du}{dt}$$

(A) esso è asintoticamente stabile se è BIBO stabile;

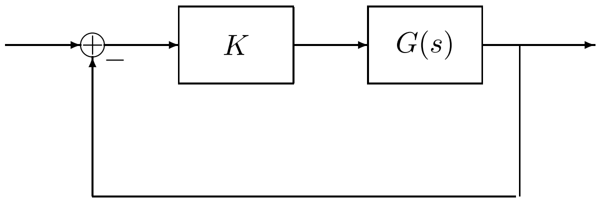
(B) esso è asintoticamente stabile se non è BIBO stabile;

(C) esso non è mai asintoticamente stabile.

2. [1.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 - 2s^2 + 5s + 2},$$

si determini per quali valori del parametro K il sistema retroazionato risulta BIBO stabile:

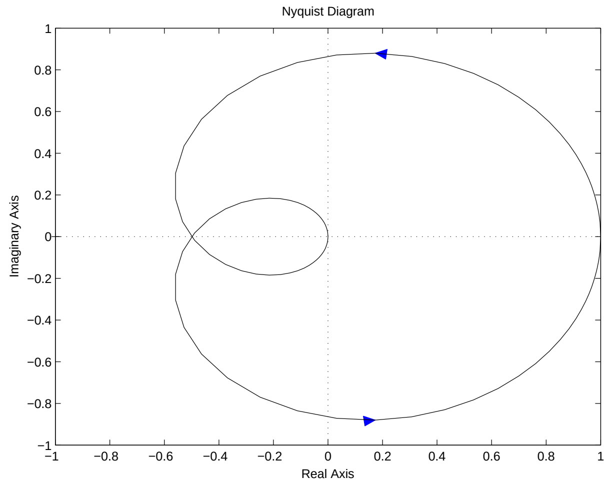


(A) $2 < K < 5$;

(B) $3 < K < 4$;

(C) nessun valore di K.

3. [2 punti] Si determini a quale funzione di trasferimento corrisponde il seguente diagramma di Nyquist completo (per ogni valore del parametro ω):



(A) $W(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)^2}$;

(B) $W(s) = \dfrac{s+2}{(s-1)^2}$;

(C) $W(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)\,\frac{1}{s} = \frac{25}{s(s^2+6s+25)} = \frac{1}{s} - \frac{s+6}{s^2+6s+25} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+3}{(s+3)^2+4^2} - \frac{3}{4}\frac{4}{(s+3)^2+4^2} \end{aligned}$$

e corrisponde al segnale

$$y(t) = \left[1 - e^{-3t}\cos(4t) - \frac{3}{4}e^{-3t}\sin(4t)\right]\delta_{-1}(t).$$

Per valutare l'eventuale sovraelongazione del segnale, ne analizzo la derivata:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{25}{4}e^{-3t}\sin(4t).$$

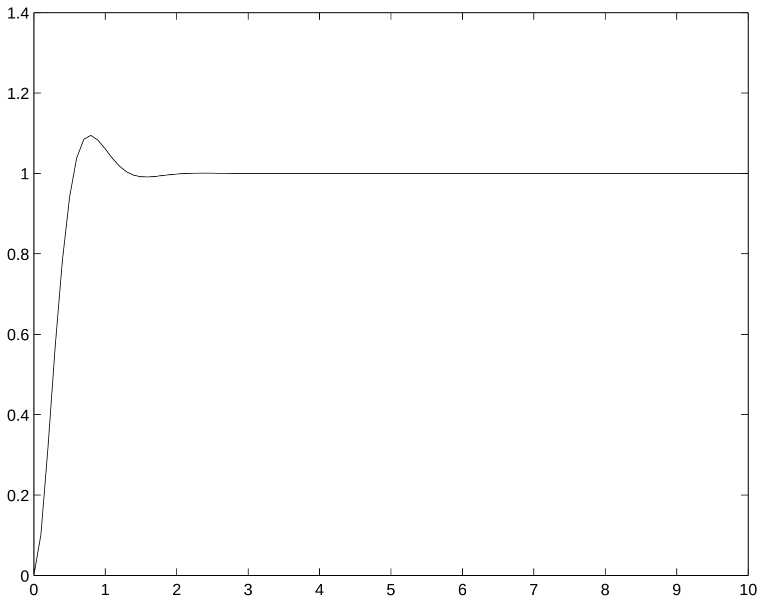
Emerge chiaramente che i punti di minimo e massimo relativo della $y(t)$, corrispondenti ai punti in dui $dy/dt = 0$, sono tutti e soli quegli istanti non negativi in cui $\sin(4t) = 0$, i.e. $t = k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}_+$.

Valutiamo $y(t)$ in corrispondenza al primo istante positivo in cui si annulla la derivata, $t_1 = \frac{\pi}{4}$. In tale punto, vista la struttura della dy/dt avrò il massimo valore della risposta al gradino. Si trova

$$y(t_1) = 1 - e^{-3\pi/4}\cos\pi = 1 + e^{-3\pi/4} = 1.0948$$

e pertanto

$$s = \frac{1.0948 - 1}{1} \cdot 100\% = 9.48\%.$$



ii) [3 punti] Riscriviamo $G(s)$ in forma di Bode:

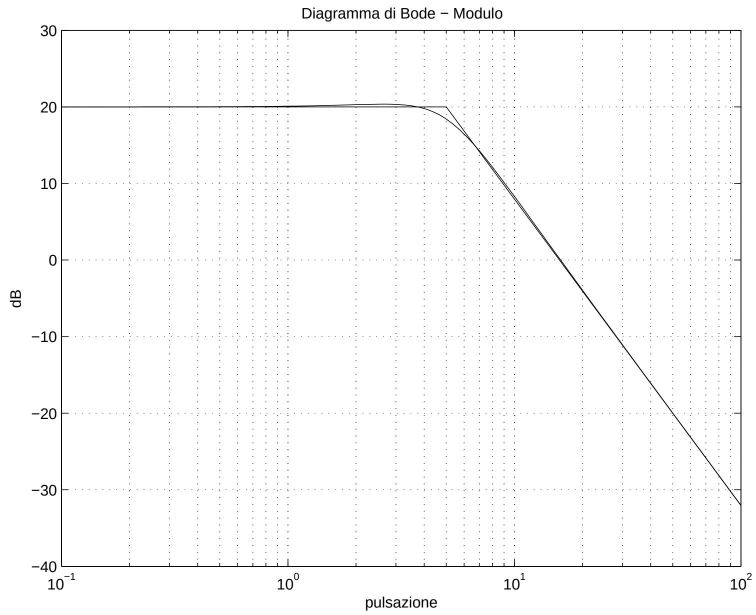
$$G(s) = \frac{1}{1 + 2 \cdot 0.6\frac{s}{5} + \frac{s^2}{5^2}}.$$

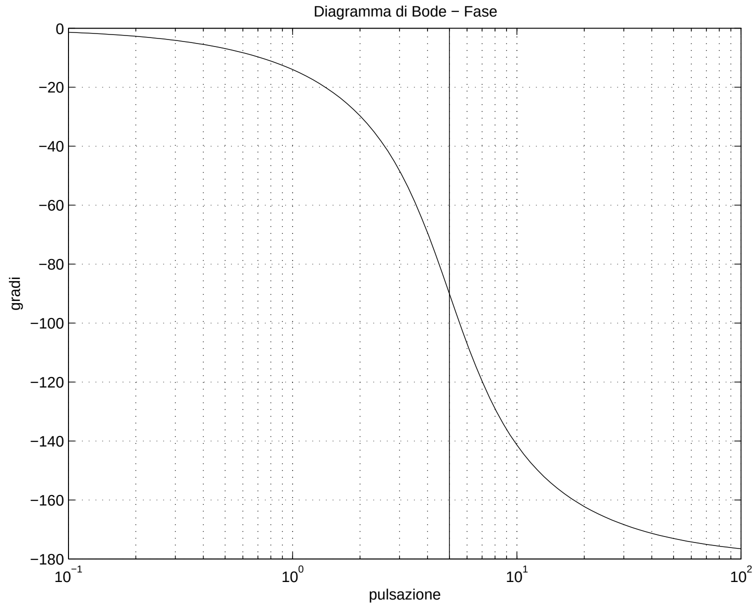
Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \leq 0.1$$

da cui segue $K_B(C) \geq 9$. Prendiamo $K_B(C) = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = 10$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:



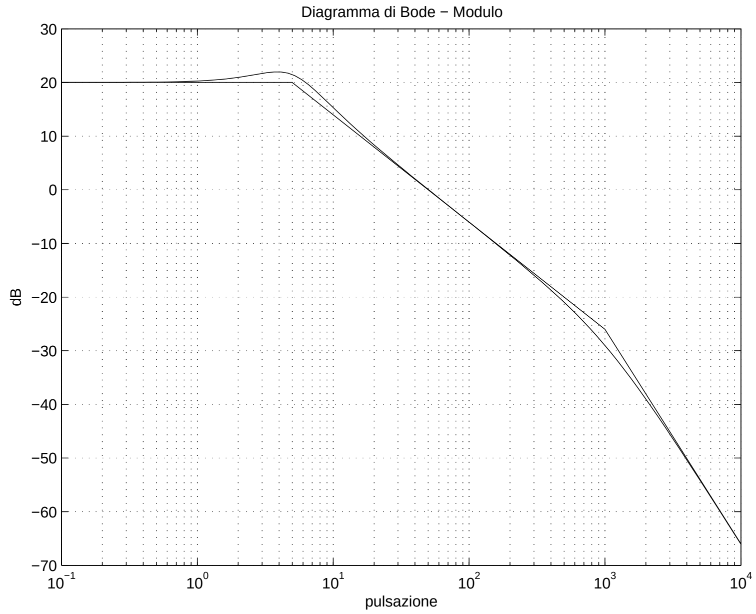


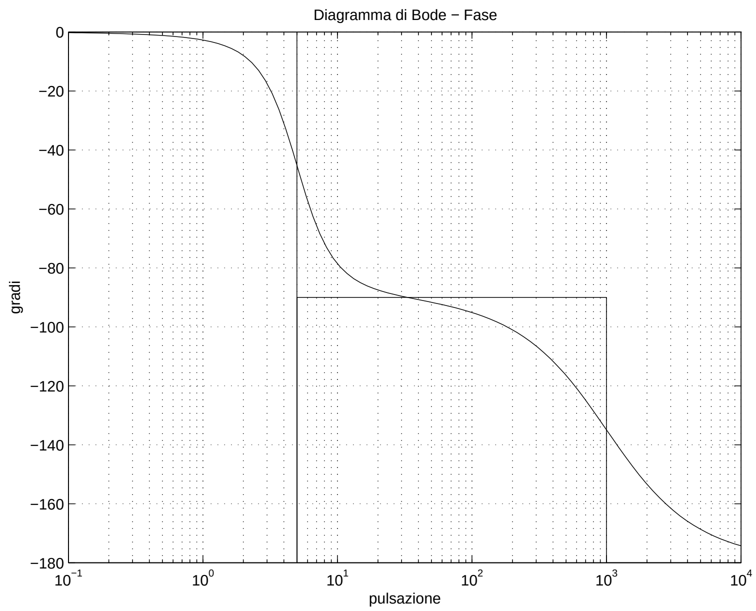
Si trova $5 \cdot 10^{1/2}$ rad/s $= \omega_A < \omega_A^* = 50$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $0° \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 70°$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze di 20 dB $= -|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|$ e da sollevare il diagramma delle fasi di almeno 70°.

Di fatto a questo risultato è possibile pervenire posizionando uno zero in -5 e successivamente un polo a pulsazioni molto elevate, ad esempio in -1000. Per effetto del controllore complessivo

$$C(s) = 10 \cdot C_{ant}(s) = 10 \cdot \frac{1 + 0.2s}{1 + 0.001s}$$

il sistema in catena aperta $C(s)G(s)$ presenta i seguenti diagrammi di Bode



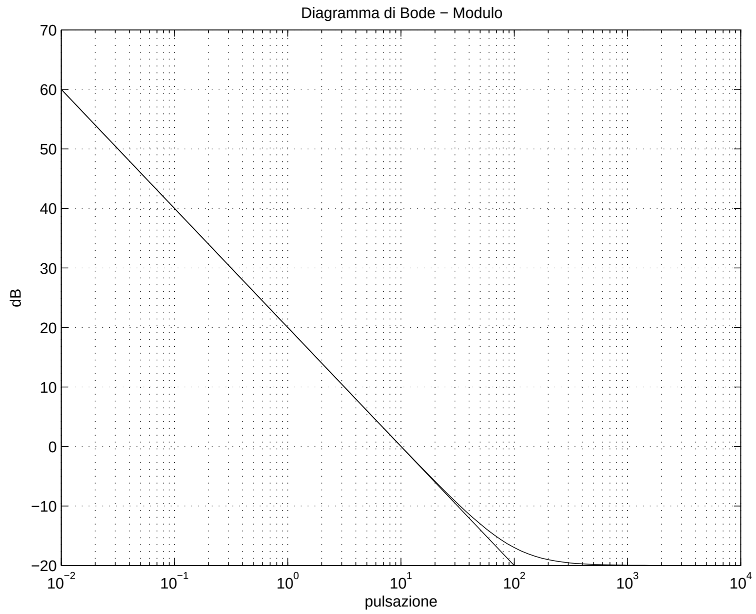


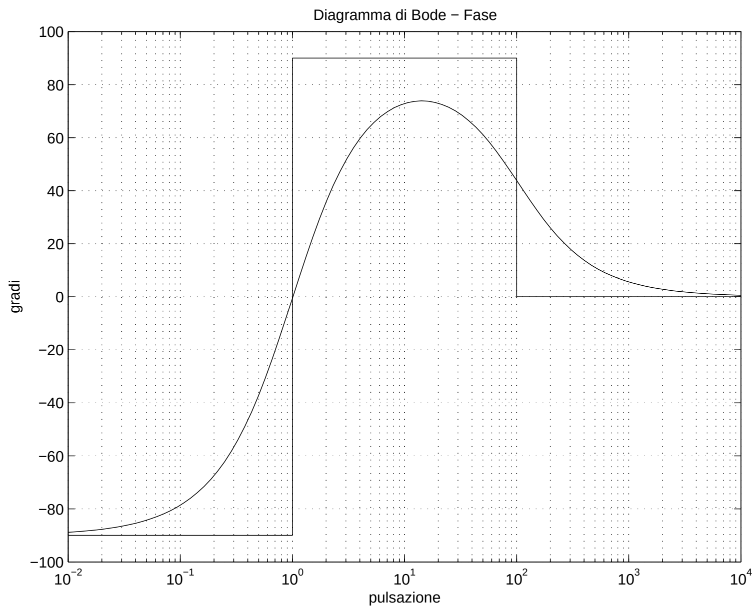
Esercizio 2. i) [3.5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = 0.1\ \frac{(s-100)(s+1)}{s(s-1)} = 10\ \frac{(1+s)(1-10^{-2}s)}{s(1-s)}.$$

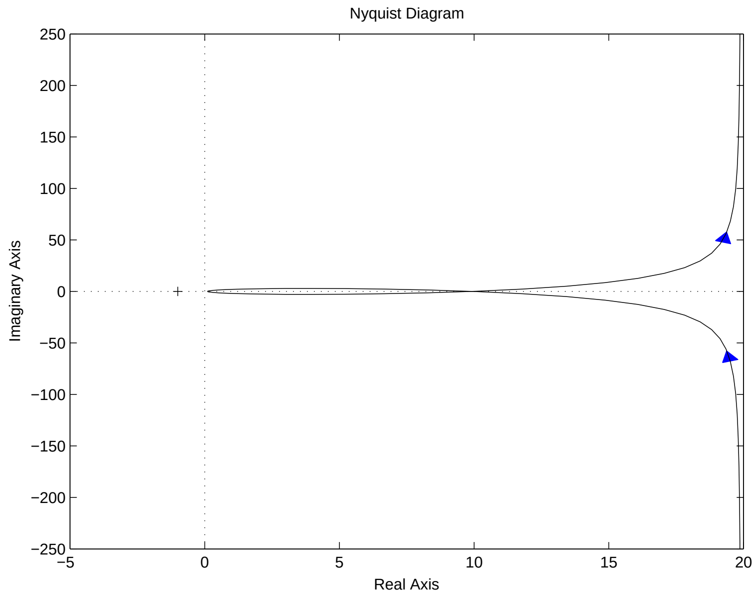
Pertanto $K_B = 10$ e la risposta in frequenza presenta uno polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale positivo con $1/T_1' = -100$ e $\mu_1' = 1$, uno zero reale negativo con $1/T_2' = 1$ e $\mu_2' = 1$, un polo reale positivo con $1/T = -1$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di

Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [3.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Poichè $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, e un polo semplice nell'origine, riportando il diagramma di Nyquist al finito attraverso un percorso di Nyquist modificato, trovo $N = 0$ e pertanto $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo a parte reale positiva.

Esercizio 3. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + s^2 + \left(\frac{3}{4} + a - a^2\right) s + \frac{3}{4}(1 - a).$$

Possiamo valutare per quali valori di a essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s)$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & \left(\frac{3}{4} + a - a^2\right) \\
2 & 1 & \frac{3}{4}(1-a) \\
1 & \frac{7a}{4} - a^2 & 0 \\
0 & \frac{3}{4}(1-a) & 0
\end{array}$$

Poichè i primi due elementi in prima colonna sono positivi, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{7a}{4} - a^2 > 0 \\ \\ \dfrac{3}{4}(1-a) > 0 \end{cases}$$

ovvero se e solo se $0 < a < 1$. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$0 < a < 1.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro a per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro a in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2+s}{s^3+s^2+\left(\frac{3}{4}+a-a^2\right)s+\frac{3}{4}(1-a)}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 0, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro a il polinomio al denominatore ha uno zero in 0 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 0 se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2+s}{s^3+s^2+\frac{3}{4}s} = \frac{s+1}{s^2+s+\frac{3}{4}}$$

e quindi, per la regola dei segni di Cartesio, essa ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $0 < a \leq 1$.

ii) [3 punti] Per $a = 1$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3+s^2+\frac{3}{4}s = s\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c_2 e^{-t/2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c_3, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tale evoluzione libera risulta convergente se e solo se $c_3 = 0$. In tale ipotesi si ha

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c_2 e^{-t/2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} y(0^-) &= y_\ell(0^-) &&= c_1, \\ \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} &= \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} &&= \frac{c_2}{\sqrt{2}} - \frac{c_1}{2}, \\ \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} &= \left.\frac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} &&= -\frac{c_2}{\sqrt{2}} - \frac{c_1}{4}. \end{aligned}$$

Da ciò segue

$$\left.\frac{d^2 y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} + \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -\frac{3}{4}y(0^-).$$

iii) [3 punti] L'evoluzione libera del sistema, in corrispondenza alle condizioni iniziali assegnate converge a zero, dal momento che soddisfa i vincoli determinati al punto precedente. Di fatto si trova

$$y_\ell(t) = e^{-t/2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

che converge a zero. Esiste, perciò, la risposta di regime permanente al segnale di ingresso assegnato. Tale risposta assume l'espressione

$$y_{rp}(t) = \left|W\left(\frac{j}{2}\right)\right| \sin\left(\frac{t}{2} + \arg W\left(\frac{j}{2}\right)\right)\delta_{-1}(t).$$

È facile verificare che

$$W\left(\frac{j}{2}\right) = \frac{1+j\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\left|W\left(\frac{j}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}},$$

mentre

$$\arg\left(W\left(\frac{j}{2}\right)\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4} = -\arctan 3.$$

iv) [2 punti] Operando in termini di trasformate di Laplace si trova

$$\frac{1}{s+1} = Y(s) = Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s+1}{s^2+s+\frac{3}{4}}\cdot U(s),$$

da cui

$$U(s) = \frac{s^2+s+\frac{3}{4}}{(s+1)^2} = 1 - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(s+1)^2}.$$

Antitrasformando si trova

$$u(t) = \delta(t) - \left[e^{-t} - \frac{3}{4}t\cdot e^{-t}\right]\delta_{-1}(t).$$

Test. [5 punti] 1C 2 B 3A.

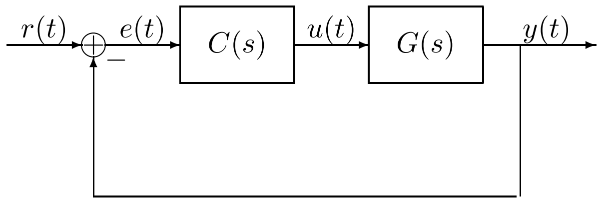
COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
TEMA B - 23 Giugno 2004

Esercizio 1. Dato il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 8s + 25},$$

i) si determini la risposta al gradino del sistema, e se ne valuti (se esiste) la sovraelongazione.

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



ii) si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

1) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) al più pari ad 0.1;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

2) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 50$ rad/sec;
3) abbia margine di fase pari almeno a 70^o.

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 0.01\,\frac{(s-1000)(s+10)}{s(s-10)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$ e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{5}{4} + a - a^2\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{5}{4}(1-a)y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt},$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 1$:

ii) si determini l'insieme delle condizioni iniziali $y(0^-)$, $\frac{dy(0^-)}{dt}$, $\frac{d^2y(0^-)}{dt^2}$ a cui corrisponde un'evoluzione libera convergente a zero;

iii) si dica se esiste la risposta di regime permanente del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = \sin(t)\,\delta_{-1}(t)$$

e alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 1, \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = -1.$$

In caso affermativo, la si calcoli.

iv) Si determini, se esiste, la sollecitazione di ingresso $u(t), t \geq 0$, che in evoluzione forzata produce il segnale di uscita

$$y(t) = y_f(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

Test. Selezionare la risposta corretta per ciascuna delle seguenti domande (ogni risposta esatta vale n punti, ogni risposta non data vale 0 punti, ogni risposta sbagliata vale - $n/3$ punti):

1. [1.5 punti] Dato un modello ingresso/uscita descritto da un'equazione differenziale del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1^2\frac{dy}{dt} - 2(a_1-1)^2y(t) = \frac{du}{dt}$$

(A) esso è asintoticamente stabile se è BIBO stabile;

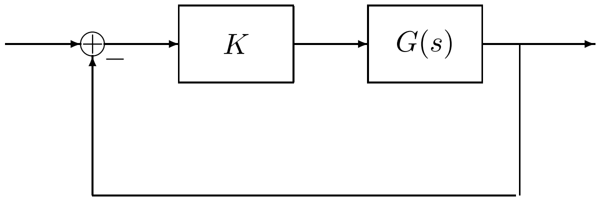
(B) esso è asintoticamente stabile se non è BIBO stabile;

(C) esso non è mai asintoticamente stabile.

2. [1.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 - s^2 + 4s + 1},$$

si determini per quali valori del parametro K il sistema retroazionato risulta BIBO stabile:

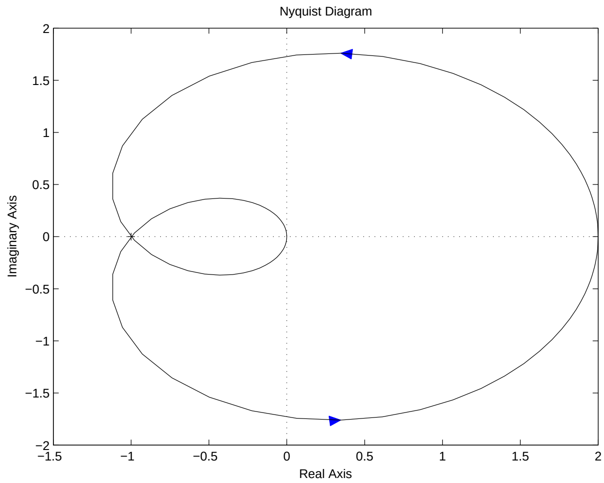


(A) $1 < K < 5$;

(B) $1 < K$;

(C) nessun valore di K.

3. [2 punti] Si determini a quale funzione di trasferimento corrisponde il seguente diagramma di Nyquist completo (per ogni valore del parametro ω):



(A) $W(s) = \dfrac{2s + 1}{(s-1)^2}$;

(B) $W(s) = \dfrac{2s + 2}{(s-1)^2}$;

(C) $W(s) = \dfrac{2s}{(s-1)^2}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)\,\frac{1}{s} = \frac{25}{s(s^2+8s+25)} = \frac{1}{s} - \frac{s+8}{s^2+8s+25} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+4}{(s+4)^2+3^2} - \frac{4}{3}\frac{3}{(s+4)^2+3^2} \end{aligned}$$

e corrisponde al segnale

$$y(t) = \left[1 - e^{-4t}\cos(3t) - \frac{4}{3}e^{-4t}\sin(3t)\right]\delta_{-1}(t).$$

Per valutare l'eventuale sovraelongazione del segnale, ne analizzo la derivata:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{25}{3}e^{-4t}\sin(3t).$$

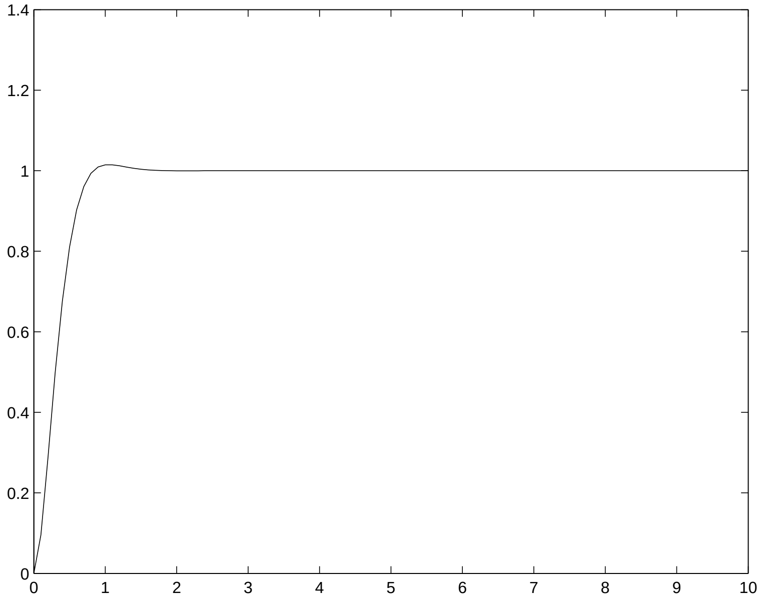
Emerge chiaramente che i punti di minimo e massimo relativo della $y(t)$, corrispondenti ai punti in dui $dy/dt = 0$, sono tutti e soli quegli istanti non negativi in cui $\sin(3t) = 0$, i.e. $t = k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}_+$.

Valutiamo $y(t)$ in corrispondenza al primo istante positivo in cui si annulla la derivata, $t_1 = \frac{\pi}{3}$. In tale punto, vista la struttura della dy/dt avrò il massimo valore della risposta al gradino. Si trova

$$y(t_1) = 1 - e^{-4\pi/3}\cos\pi = 1 + e^{-4\pi/3} = 1.0152$$

e pertanto

$$s = \frac{1.0152-1}{1}\cdot 100\% = 1.52\%.$$



ii) [3 punti] Riscriviamo $G(s)$ in forma di Bode:

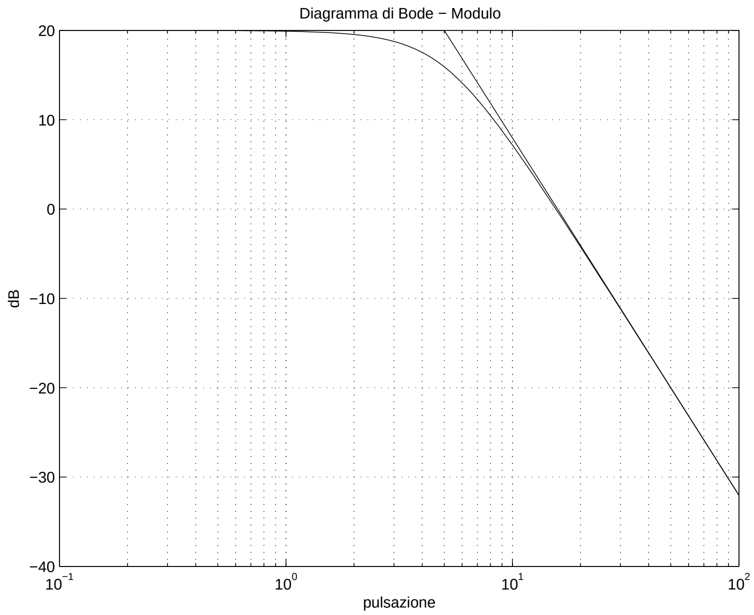
$$G(s) = \frac{1}{1 + 2 \cdot 0.8\frac{s}{5} + \frac{s^2}{5^2}}.$$

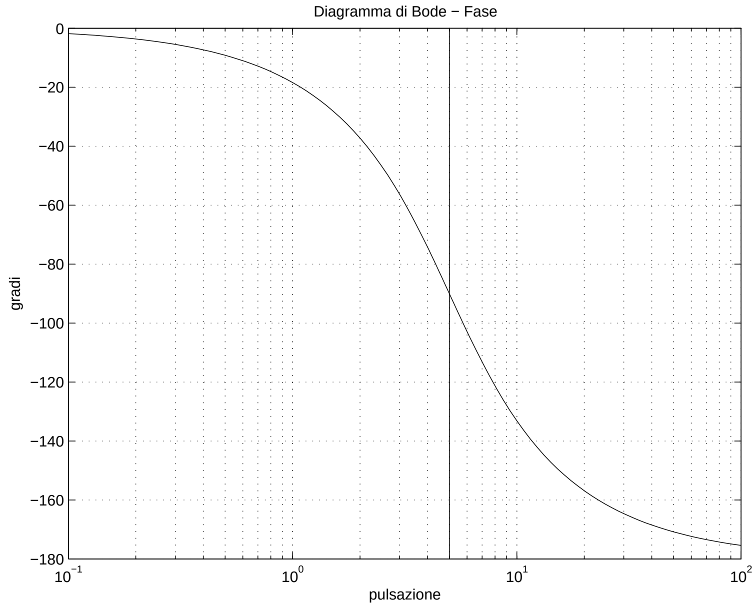
Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \leq 0.1$$

da cui segue $K_B(C) \geq 9$. Prendiamo $K_B(C) = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = 10$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:



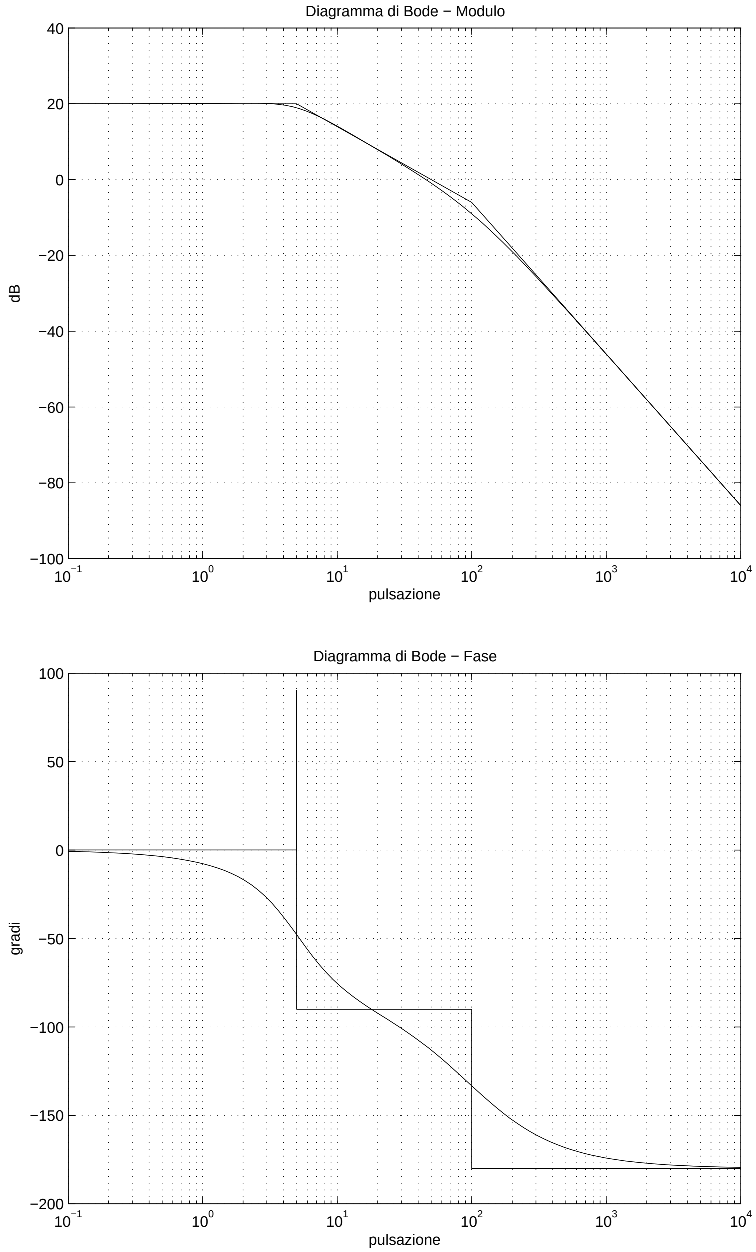


Si trova $5 \cdot 10^{1/2}$ rad/s $= \omega_A < \omega_A^* = 50$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $0° \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 70°$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze di 20 dB $= -|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|$ e da sollevare il diagramma delle fasi di almeno $70°$.

Di fatto a questo risultato è possibile pervenire posizionando uno zero in -5 e successivamente un polo a pulsazioni molto elevate, ad esempio in -1000. Per effetto del controllore complessivo

$$C(s) = 10 \cdot C_{ant}(s) = 10 \cdot \frac{1 + 0.2s}{1 + 0.001s}$$

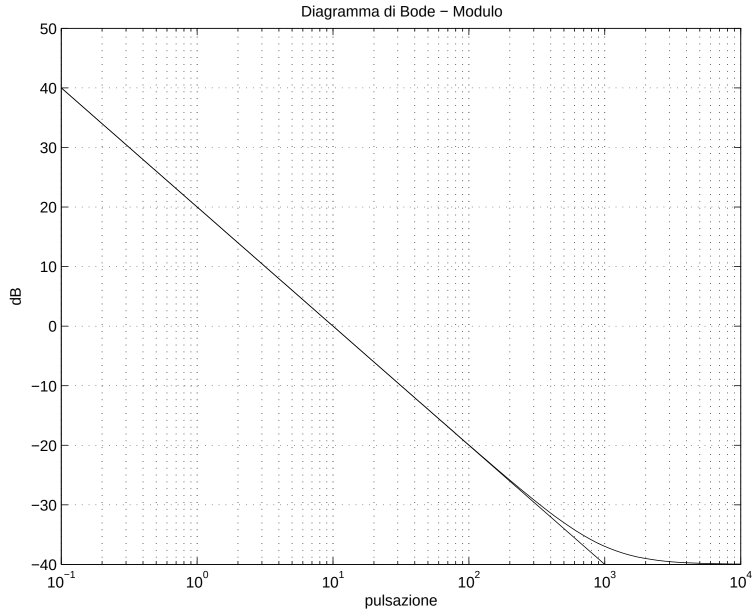
il sistema in catena aperta $C(s)G(s)$ presenta i seguenti diagrammi di Bode

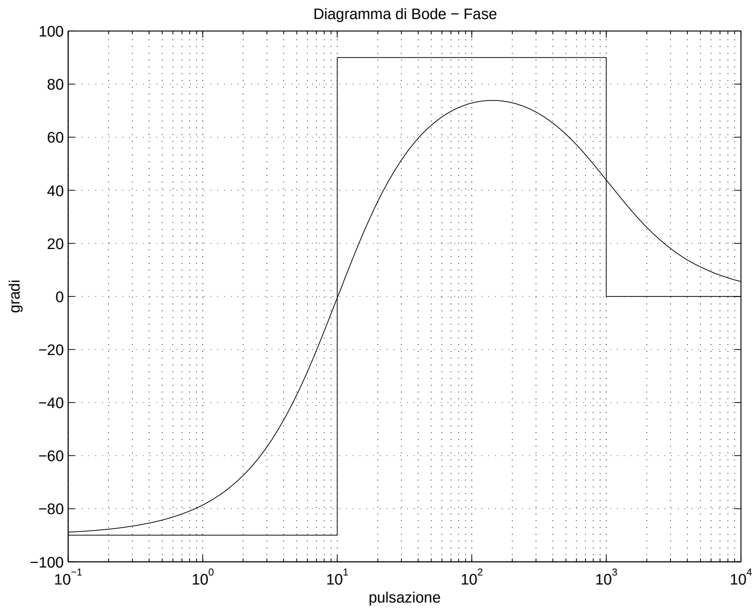


Esercizio 2. i) [3.5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

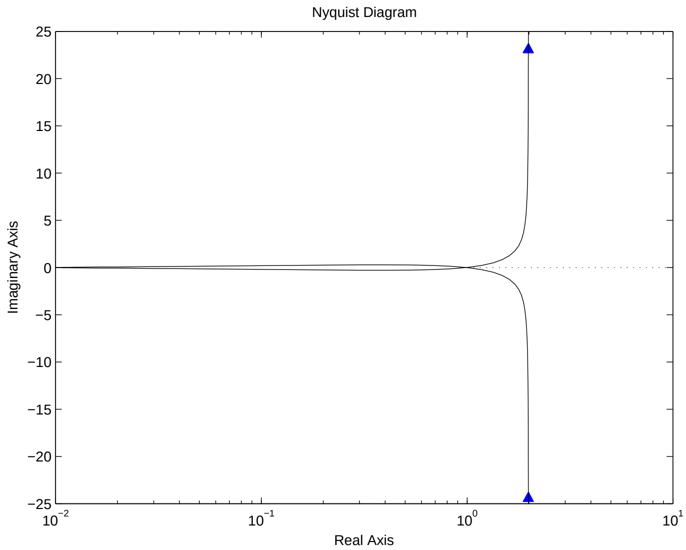
$$G(s) = 0.01\ \frac{(s-1000)(s+10)}{s(s-10)} = 10\ \frac{(1+0.1s)(1-10^{-3}s)}{s(1-0.1s)}.$$

Pertanto $K_B = 10$ e la risposta in frequenza presenta uno polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale positivo con $1/T_1' = -1000$ e $\mu_1' = 1$, uno zero reale negativo con $1/T_2' = 10$ e $\mu_2' = 1$, un polo reale positivo con $1/T = -10$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [3.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Poichè $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, e un polo semplice nell'origine, riportando il diagramma di Nyquist al finito attraverso un percorso di Nyquist modificato, trovo $N = 0$ e pertanto $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo a parte reale positiva.

Esercizio 3. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + s^2 + \left(\frac{5}{4} + a - a^2\right) s + \frac{5}{4}(1 - a).$$

Possiamo valutare per quali valori di a essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s)$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & \left(\frac{5}{4} + a - a^2\right) \\
2 & 1 & \frac{5}{4}(1 - a) \\
1 & \frac{9a}{4} - a^2 & 0 \\
0 & \frac{5}{4}(1 - a) & 0
\end{array}$$

Poichè i primi due elementi in prima colonna sono positivi, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{9a}{4} - a^2 > 0 \\ \\ \dfrac{5}{4}(1-a) > 0 \end{cases}$$

ovvero se e solo se $0 < a < 1$. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$0 < a < 1.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro a per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro a in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 + s}{s^3 + s^2 + \left(\frac{5}{4} + a - a^2\right) s + \frac{5}{4}(1-a)}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 0, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro a il polinomio al denominatore ha uno zero in 0 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 0 se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2 + s}{s^3 + s^2 + \frac{5}{4}s} = \frac{s+1}{s^2 + s + \frac{5}{4}}$$

e quindi, per la regola dei segni di Cartesio, essa ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in 0 < a \leq 1$.

ii) [3 punti] Per $a = 1$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + s^2 + \frac{5}{4}s = s\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right]$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t/2} \cos(t) + c_2 e^{-t/2} \sin(t) + c_3, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tale evoluzione libera risulta convergente se e solo se $c_3 = 0$. In tale ipotesi si ha

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t/2} \cos(t) + c_2 e^{-t/2} \sin(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

da cui segue

$$\begin{array}{rclcl} y(0^-) & = & y_\ell(0^-) & = & c_1, \\ \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = & \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = & c_2 - \frac{c_1}{2}, \\ \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} & = & \left.\frac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} & = & -c_2 - \frac{3c_1}{4}. \end{array}$$

Da ciò segue

$$\left.\frac{d^2 y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} + \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -\frac{5}{4}y(0^-).$$

iii) [3 punti] L'evoluzione libera del sistema, in corrispondenza alle condizioni iniziali assegnate converge a zero, dal momento che soddisfa i vincoli determinati al punto precedente. Esiste, perciò, la risposta di regime permanente al segnale di ingresso assegnato. Tale risposta assume l'espressione

$$y_{rp}(t) = |W(j)| \ \sin\left(t + \arg W(j)\right) \delta_{-1}(t).$$

È facile verificare che

$$W(j) = \frac{1+j}{\frac{1}{4}+j}$$

e quindi

$$|W(j)| = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{17}},$$

mentre

$$\arg\left(W\left(\frac{j}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \arctan 4 \text{ rad}.$$

iv) [2 punti] Operando in termini di trasformate di Laplace si trova

$$\frac{1}{s+1} = Y(s) = Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s+1}{s^2+s+\frac{5}{4}}\cdot U(s),$$

da cui

$$U(s) = \frac{s^2+s+\frac{5}{4}}{(s+1)^2} = 1 - \frac{1}{s+1} + \frac{5}{4}\frac{1}{(s+1)^2}.$$

Antitrasformando si trova

$$u(t) = \delta(t) - \left[e^{-t} - \frac{5}{4}t\cdot e^{-t}\right]\delta_{-1}(t).$$

Test. [5 punti] 1C 2 B 3B.

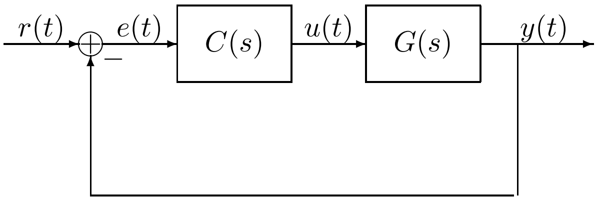
COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
TEMA C - 23 Giugno 2004

Esercizio 1. Dato il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 12s + 100},$$

i) si determini la risposta al gradino del sistema, e se ne valuti (se esiste) la sovraelongazione.

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



ii) si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

   1) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) al più pari ad 0.1;

   e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

   2) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 100$ rad/sec;

   3) abbia margine di fase pari almeno a 70^o.

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 0.01\ \frac{(s + 1000)(s + 1)}{s(s - 1)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$ e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} + a - a^2\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{2}(1-a)y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt},$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 1$:

ii) si determini l'insieme delle condizioni iniziali $y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \frac{d^2y(0^-)}{dt^2}$ a cui corrisponde un'evoluzione libera convergente a zero;

iii) si dica se esiste la risposta di regime permanente del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)\delta_{-1}(t)$$

e alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 3, \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = -3.$$

In caso affermativo, la si calcoli.

iv) Si determini, se esiste, la sollecitazione di ingresso $u(t), t \geq 0$, che in evoluzione forzata produce il segnale di uscita

$$y(t) = y_f(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

Test. Selezionare la risposta corretta per ciascuna delle seguenti domande (ogni risposta esatta vale n punti, ogni risposta non data vale 0 punti, ogni risposta sbagliata vale - $n/3$ punti):

1. [1.5 punti] Dato un modello ingresso/uscita descritto da un'equazione differenziale del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} - a_1\frac{dy}{dt} + (a_1 - 1)y(t) = \frac{du}{dt}$$

(A) esso è asintoticamente stabile se è BIBO stabile;

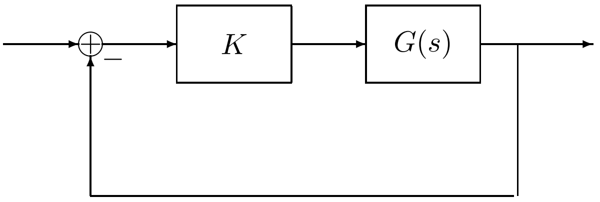
(B) esso è asintoticamente stabile se non è BIBO stabile;

(C) esso non è mai asintoticamente stabile.

2. [1.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2 - 2}{s^3 - s^2 + 5s + 2},$$

si determini per quali valori del parametro K il sistema retroazionato risulta BIBO stabile:

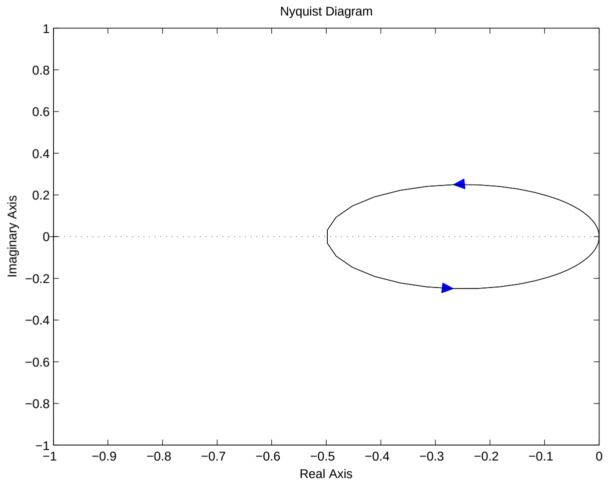


(A) $2 < K < 5$;

(B) $3 < K < 4$;

(C) nessun valore di K.

3. [2 punti] Si determini a quale funzione di trasferimento corrisponde il seguente diagramma di Nyquist completo (per ogni valore del parametro ω):



(A) $W(s) = \frac{s+10}{(s-10)^2}$;

(B) $W(s) = \frac{s+10}{(s-1)^2}$;

(C) $W(s) = 10\frac{s}{(s-10)^2}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)\,\frac{1}{s} = \frac{100}{s(s^2+12s+100)} = \frac{1}{s} - \frac{s+12}{s^2+12s+100} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+6}{(s+6)^2+8^2} - \frac{3}{4}\frac{4}{(s+6)^2+8^2} \end{aligned}$$

e corrisponde al segnale

$$y(t) = \left[1 - e^{-6t}\cos(8t) - \frac{3}{4}e^{-6t}\sin(8t)\right]\delta_{-1}(t).$$

Per valutare l'eventuale sovraelongazione del segnale, ne analizzo la derivata:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{25}{2}e^{-6t}\sin(8t).$$

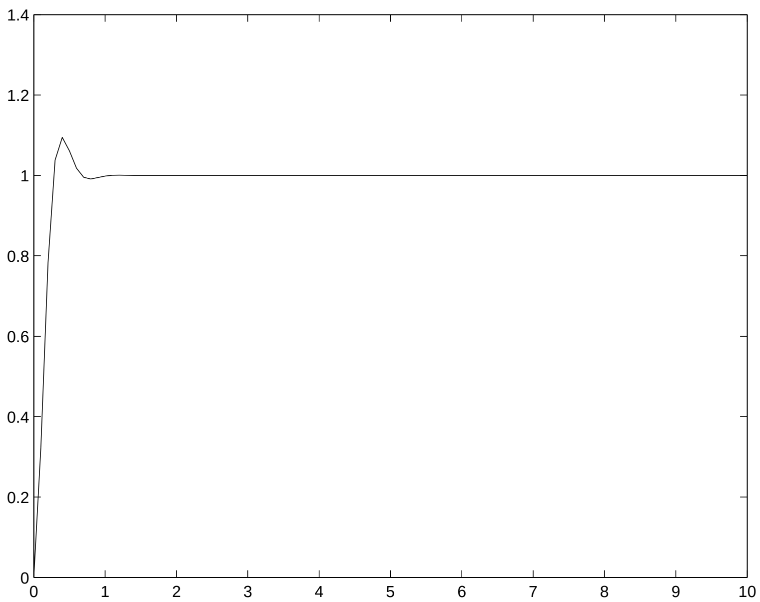
Emerge chiaramente che i punti di minimo e massimo relativo della $y(t)$, corrispondenti ai punti in dui $dy/dt = 0$, sono tutti e soli quegli istanti non negativi in cui $\sin(8t) = 0$, i.e. $t = k\frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}_+$.

Valutiamo $y(t)$ in corrispondenza al primo istante positivo in cui si annulla la derivata, $t_1 = \frac{\pi}{8}$. In tale punto, vista la struttura della dy/dt avrò il massimo valore della risposta al gradino. Si trova

$$y(t_1) = 1 - e^{-3\pi/4}\cos\pi = 1 + e^{-3\pi/4} = 1.0948$$

e pertanto

$$s = \frac{1.0948 - 1}{1} \cdot 100\% = 9.48\%.$$



ii) [3 punti] Riscriviamo $G(s)$ in forma di Bode:

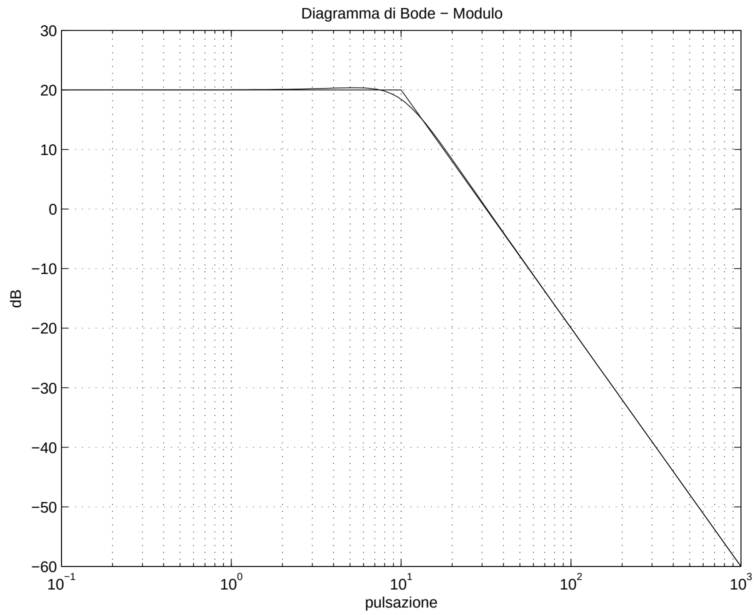
$$G(s) = \frac{1}{1 + 2 \cdot 0.6 \frac{s}{10} + \frac{s^2}{10^2}}.$$

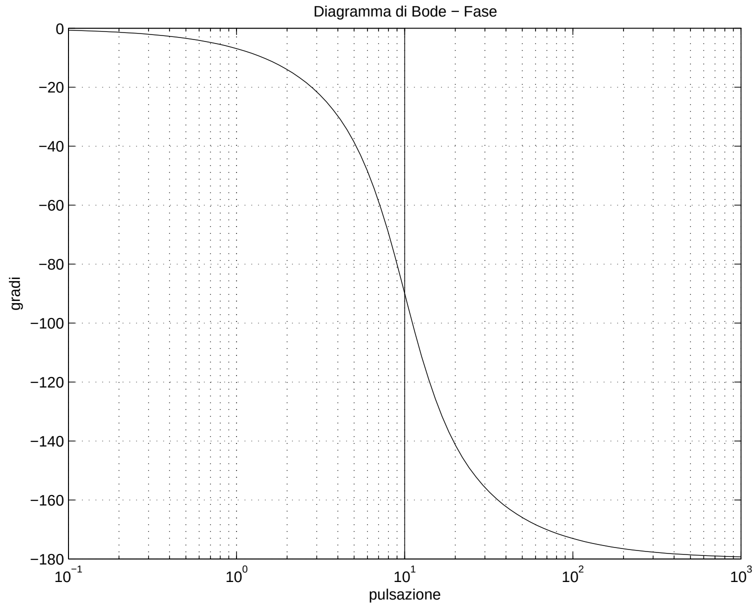
Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \leq 0.1$$

da cui segue $K_B(C) \geq 9$. Prendiamo $K_B(C) = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = 10$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:



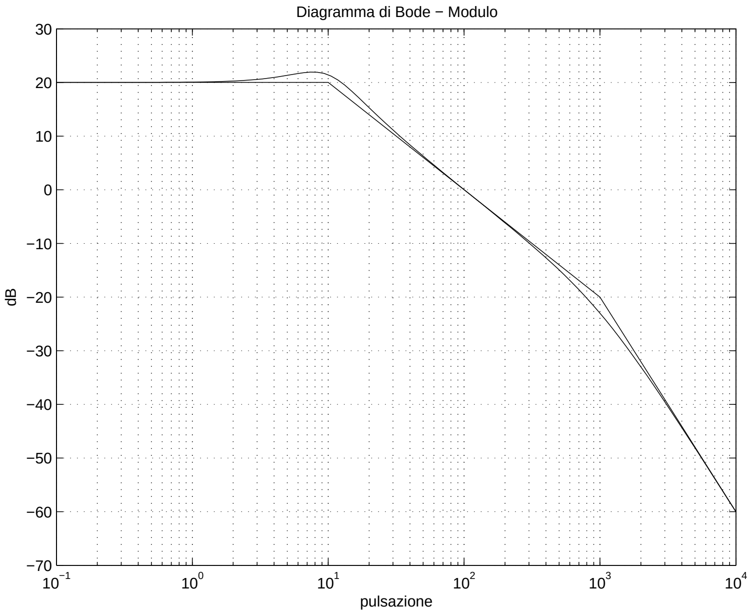


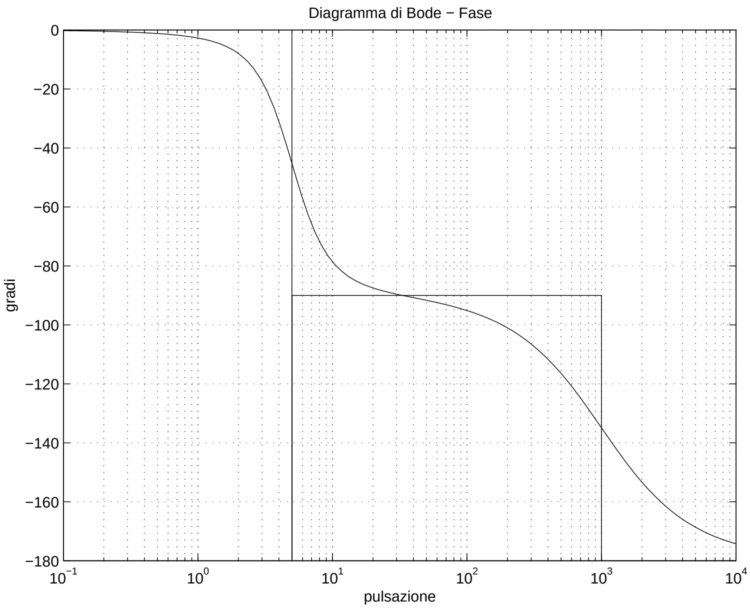
Si trova $10^{3/2}$ rad/s $= \omega_A < \omega_A^* = 100$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $0° \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 70°$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze di 20 dB $= -|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|$ e da sollevare il diagramma delle fasi di almeno $70°$.

Di fatto a questo risultato è possibile pervenire posizionando uno zero in -10 e successivamente un polo a pulsazioni molto elevate, ad esempio in -1000. Per effetto del controllore complessivo

$$C(s) = 10 \cdot C_{ant}(s) = 10 \cdot \frac{1 + 0.1s}{1 + 0.001s}$$

il sistema in catena aperta $C(s)G(s)$ presenta i seguenti diagrammi di Bode

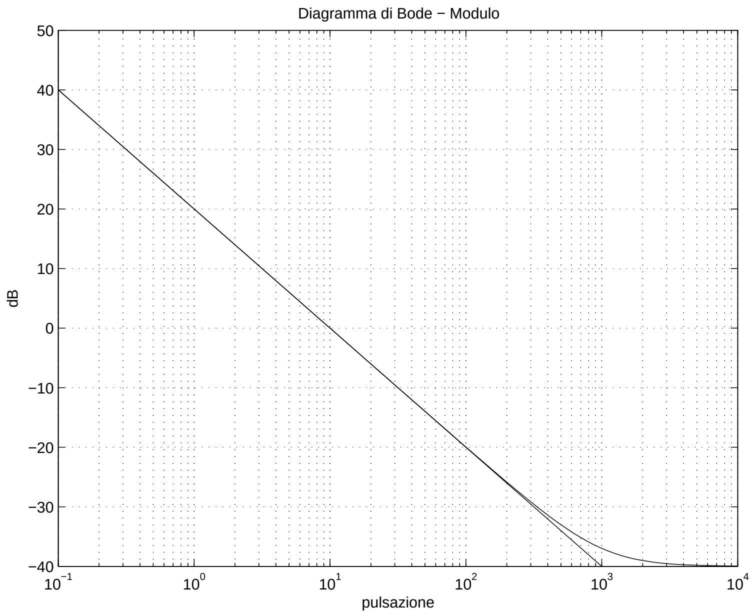


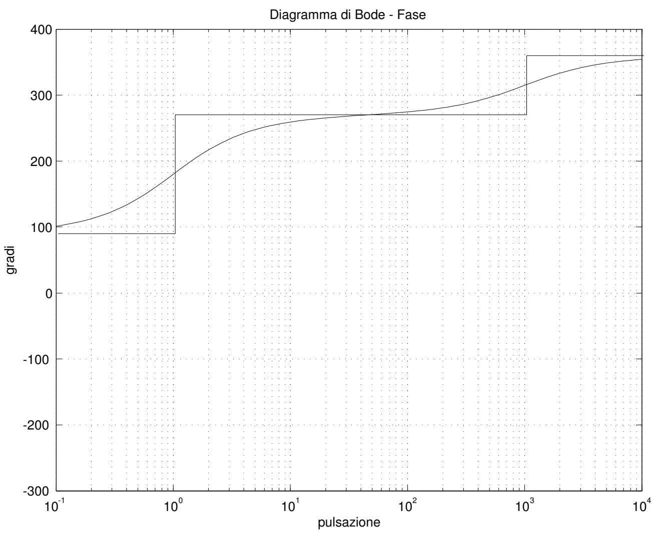


Esercizio 2. i) [3.5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

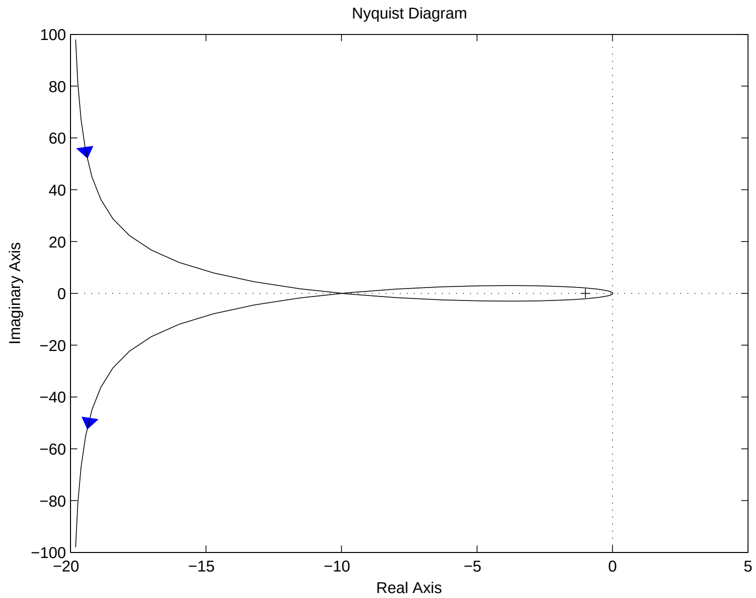
$$G(s) = 0.01 \, \frac{(s+1000)(s+1)}{s(s-1)} = -10 \, \frac{(1+s)(1+10^{-3}s)}{s(1-s)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta uno polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale negativo con $1/T'_1 = 1000$ e $\mu'_1 = 1$, uno zero reale negativo con $1/T'_2 = 1$ e $\mu'_2 = 1$, un polo reale positivo con $1/T = -1$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [4 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Una valutazione del punto di intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo evidenzia come tale punto si trovi in $-10 + j0$ e quindi alla sinistra di $-1 + j0$ (lo si vede già dai diagrammi di Bode). Ciò assicura che una volta riportato al finito il diagramma di Nyquist attraverso un percorso di Nyquist modificato compia un giro in verso antiorario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 1$. Poichè $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, e un polo semplice nell'origine, la condizione $N = 1$ assicura $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile.

Esercizio 3. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + s^2 + \left(\frac{1}{2} + a - a^2\right) s + \frac{1}{2}(1 - a).$$

Possiamo valutare per quali valori di a essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s)$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & \left(\frac{1}{2} + a - a^2\right) \\
2 & 1 & \frac{1}{2}(1 - a) \\
1 & \frac{3a}{2} - a^2 & 0 \\
0 & \frac{1}{2}(1 - a) & 0
\end{array}$$

Poichè i primi due elementi in prima colonna sono positivi, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{3a}{2} - a^2 > 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}(1-a) > 0 \end{cases}$$

ovvero se e solo se $0 < a < 1$. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$0 < a < 1.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro a per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro a in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2+s}{s^3+s^2+\left(\frac{1}{2}+a-a^2\right)s+\frac{1}{2}(1-a)}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 0, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro a il polinomio al denominatore ha uno zero in 0 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 0 se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2+s}{s^3+s^2+\frac{1}{2}s} = \frac{s+1}{s^2+s+\frac{1}{2}}$$

e quindi, per la regola dei segni di Cartesio, essa ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in 0 < a \leq 1$.

ii) [3 punti] Per $a = 1$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + s^2 + \frac{1}{2}s = s\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2 e^{-t/2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) + c_3, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tale evoluzione libera risulta convergente se e solo se $c_3 = 0$. In tale ipotesi si ha

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2 e^{-t/2}\sin\left(\frac{t}{2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

da cui segue

$$
\begin{aligned}
y(0^-) &= y_\ell(0^-) &&= c_1, \\
\left.\tfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} &= \left.\tfrac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} &&= \tfrac{c_2}{2} - \tfrac{c_1}{2}, \\
\left.\tfrac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} &= \left.\tfrac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} &&= -\tfrac{c_2}{2}.
\end{aligned}
$$

Da ciò segue

$$
\left.\frac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} + \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -\frac{1}{2}y(0^-).
$$

iii) [3 punti] L'evoluzione libera del sistema, in corrispondenza alle condizioni iniziali assegnate converge a zero, dal momento che soddisfa i vincoli determinati al punto precedente. Esiste, perciò, la risposta di regime permanente al segnale di ingresso assegnato. Tale risposta assume l'espressione

$$
y_{rp}(t) = \left| W\left(\frac{j}{2}\right) \right| \sin\left(\frac{t}{2} + \arg W\left(\frac{j}{2}\right)\right) \delta_{-1}(t).
$$

È facile verificare che

$$
W\left(\frac{j}{2}\right) = \frac{1 + j\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + j\frac{1}{2}}
$$

e quindi

$$
\left| W\left(\frac{j}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{\frac{16}{5}} = \sqrt{4},
$$

mentre

$$
\arg\left(W\left(\frac{j}{2}\right)\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan(2).
$$

iv) [2 punti] Operando in termini di trasformate di Laplace si trova

$$
\frac{1}{s+1} = Y(s) = Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s+1}{s^2+s+\frac{1}{2}} \cdot U(s),
$$

da cui

$$
U(s) = \frac{s^2+s+\frac{1}{2}}{(s+1)^2} = 1 - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2}.
$$

Antitrasformando si trova

$$
u(t) = \delta(t) - \left[e^{-t} - \frac{1}{2}t \cdot e^{-t}\right] \delta_{-1}(t).
$$

Test. [5 punti] 1C 2 C 3C.

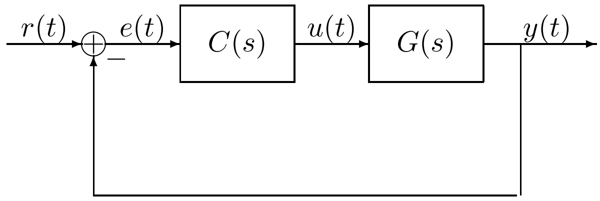
COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI (Matricole Pari)
TEMA D - 23 Giugno 2004

Esercizio 1. Dato il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 16s + 100},$$

i) si determini la risposta al gradino del sistema, e se ne valuti (se esiste) la sovraelongazione.

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



ii) si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

1) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) al più pari ad 0.1;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

2) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 100$ rad/sec;

3) abbia margine di fase pari almeno a 70^o.

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 0.1\ \frac{(s+100)(s+1)}{s(s-1)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$ e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{9}{4} + a - a^2\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{9}{4}(1-a)y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt},$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 1$:

ii) si determini l'insieme delle condizioni iniziali $y(0^-)$, $\frac{dy(0^-)}{dt}$, $\frac{d^2y(0^-)}{dt^2}$ a cui corrisponde un'evoluzione libera convergente a zero;

iii) si dica se esiste la risposta di regime permanente del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = \sin\left(\frac{t}{2}\right)\delta_{-1}(t)$$

e alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = -1, \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 1.$$

In caso affermativo, la si calcoli.

iv) Si determini, se esiste, la sollecitazione di ingresso $u(t), t \geq 0$, che in evoluzione forzata produce il segnale di uscita

$$y(t) = y_f(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

Test. Selezionare la risposta corretta per ciascuna delle seguenti domande (ogni risposta esatta vale n punti, ogni risposta non data vale 0 punti, ogni risposta sbagliata vale - $n/3$ punti):

1. [1.5 punti] Dato un modello ingresso/uscita descritto da un'equazione differenziale del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - 1)^2\frac{dy}{dt} - a_1 y(t) = \frac{du}{dt} - a_1 u(t)$$

(A) esso è asintoticamente stabile se $a_1 > 0$;

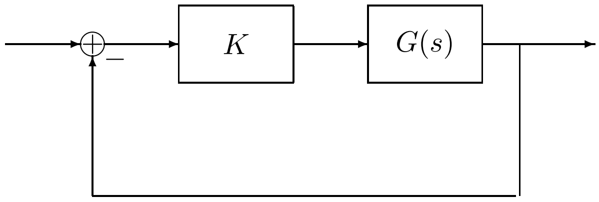
(B) esso è asintoticamente stabile solo se $a_1 < 0$;

(C) esso non è mai asintoticamente stabile.

2. [1.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^3 - s}{s^3 + s^2 + 5s + 2},$$

si determini per quali valori del parametro K il sistema retroazionato risulta BIBO stabile:

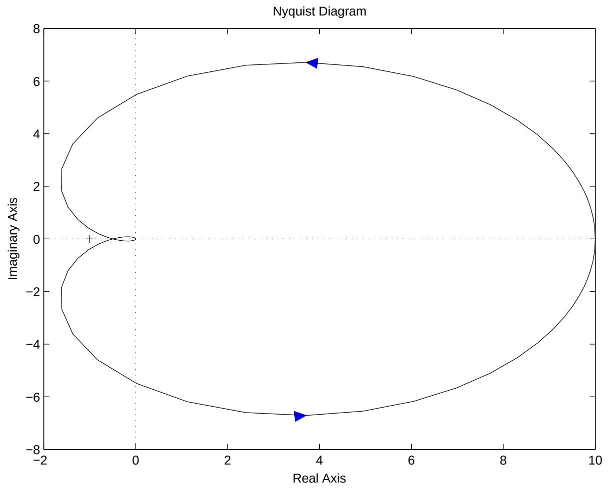


(A) $2 < K < 5$;

(B) $-1 < K < 1$;

(C) $K < 2$.

3. [2 punti] Si determini a quale funzione di trasferimento corrisponde il seguente diagramma di Nyquist completo (per ogni valore del parametro ω):



(A) $W(s) = \frac{s+10}{(s-10)^2}$;

(B) $W(s) = \frac{s+10}{(s-1)^2}$;

(C) $W(s) = 10\frac{s}{(s-10)^2}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)\,\frac{1}{s} = \frac{100}{s(s^2+16s+100)} = \frac{1}{s} - \frac{s+16}{s^2+16s+100} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+8}{(s+8)^2+6^2} - \frac{4}{3}\frac{4}{(s+8)^2+6^2} \end{aligned}$$

e corrisponde al segnale

$$y(t) = \left[1 - e^{-8t}\cos(6t) - \frac{4}{3}e^{-8t}\sin(6t)\right]\delta_{-1}(t).$$

Per valutare l'eventuale sovraelongazione del segnale, ne analizzo la derivata:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{50}{3}e^{-8t}\sin(6t).$$

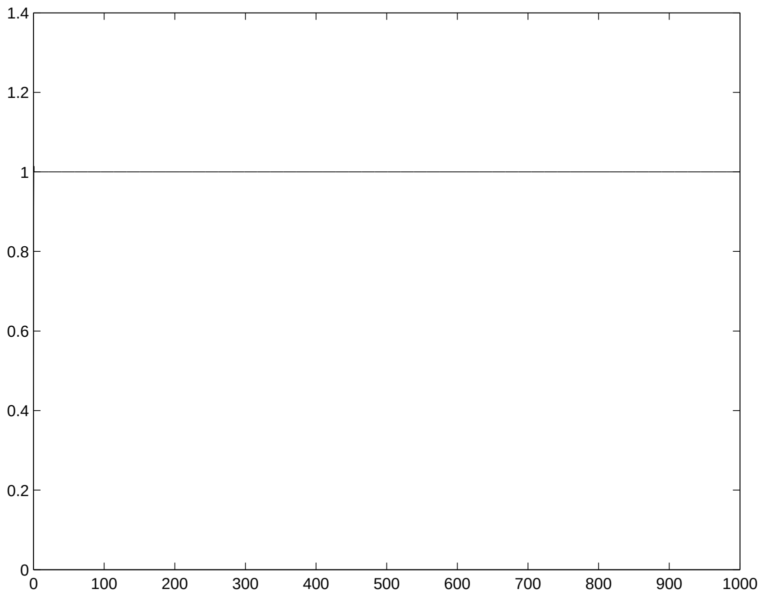
Emerge chiaramente che i punti di minimo e massimo relativo della $y(t)$, corrispondenti ai punti in dui $dy/dt = 0$, sono tutti e soli quegli istanti non negativi in cui $\sin(6t) = 0$, i.e. $t = k\frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}_+$.

Valutiamo $y(t)$ in corrispondenza al primo istante positivo in cui si annulla la derivata, $t_1 = \frac{\pi}{6}$. In tale punto, vista la struttura della dy/dt avrò il massimo valore della risposta al gradino. Si trova

$$y(t_1) = 1 - e^{-4\pi/3}\cos\pi = 1 + e^{-4\pi/3} = 1.0152$$

e pertanto

$$s = \frac{1.0152 - 1}{1} \cdot 100\% = 1.52\%.$$



ii) [3 punti] Riscriviamo $G(s)$ in forma di Bode:

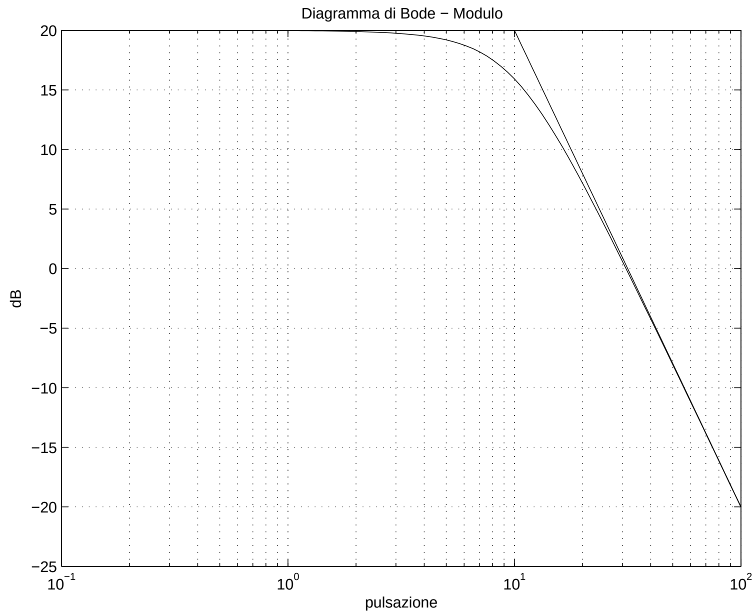
$$G(s) = \frac{1}{1 + 2 \cdot 0.8 \frac{s}{10} + \frac{s^2}{10^2}}.$$

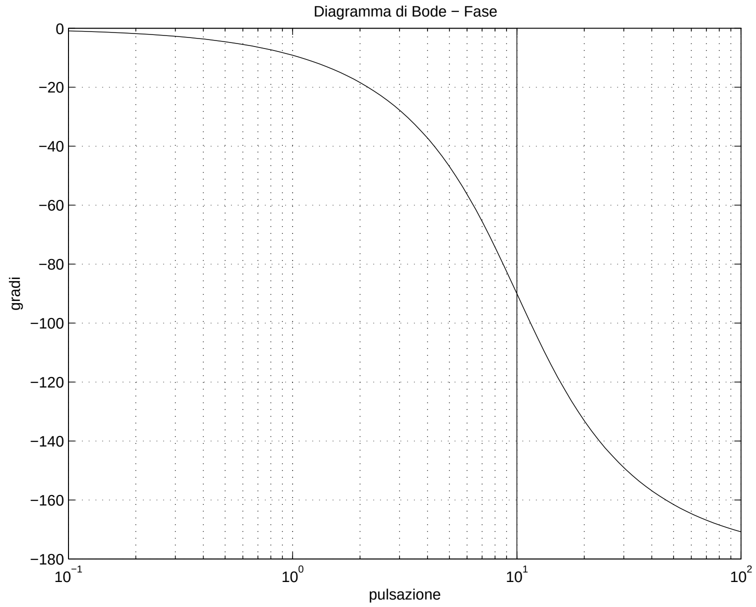
Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \leq 0.1$$

da cui segue $K_B(C) \geq 9$. Prendiamo $K_B(C) = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = 10$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:



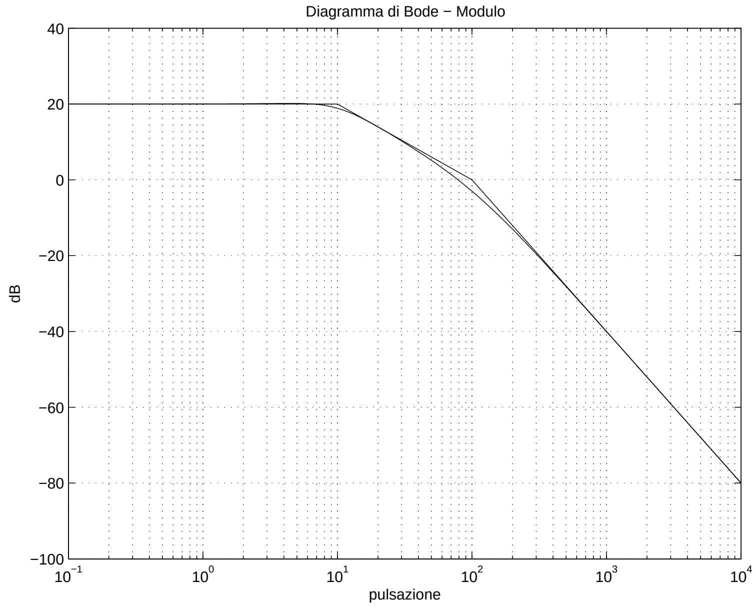


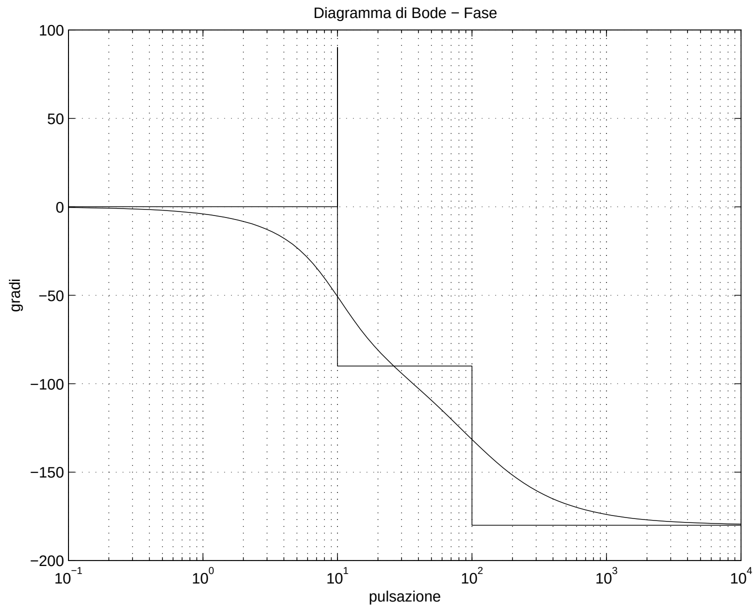
Si trova $10^{3/2}$ rad/s $= \omega_A < \omega_A^* = 100$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $0° \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 70°$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze di 20 dB $= -|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|$ e da sollevare il diagramma delle fasi di almeno $70°$.

Di fatto a questo risultato è possibile pervenire posizionando uno zero in -10 e successivamente un polo a pulsazioni molto elevate, ad esempio in -1000. Per effetto del controllore complessivo

$$C(s) = 10 \cdot C_{ant}(s) = 10 \cdot \frac{1 + 0.1s}{1 + 0.001s}$$

il sistema in catena aperta $C(s)G(s)$ presenta i seguenti diagrammi di Bode

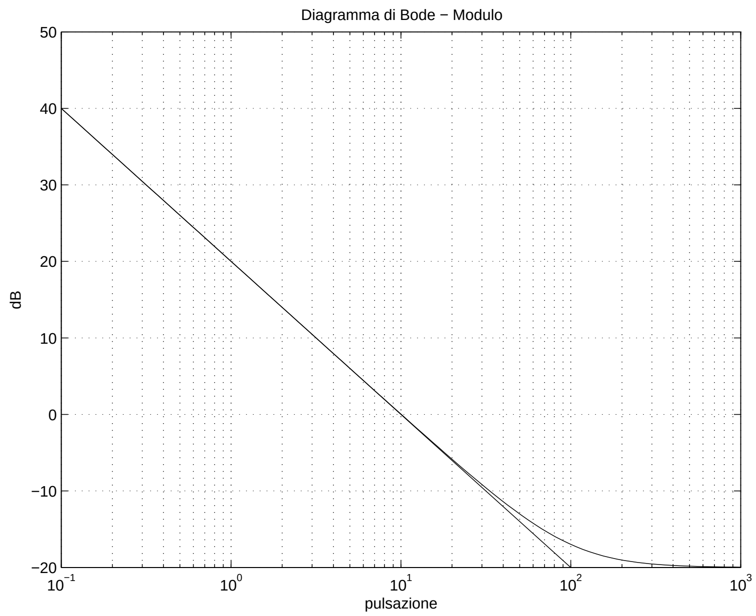


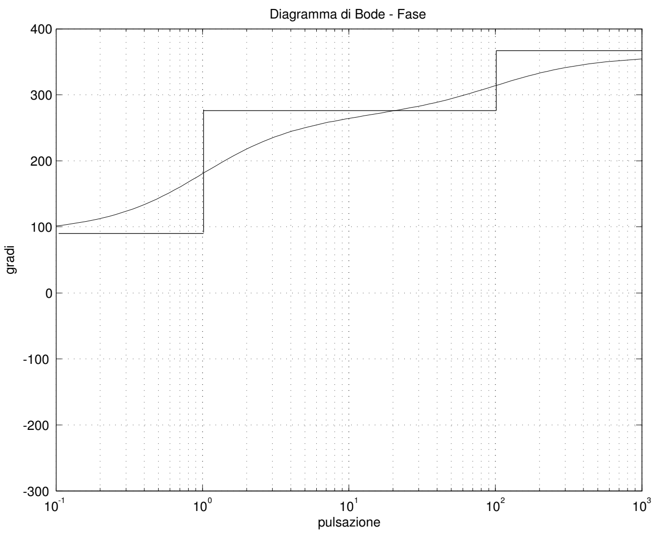


Esercizio 2. i) [3.5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

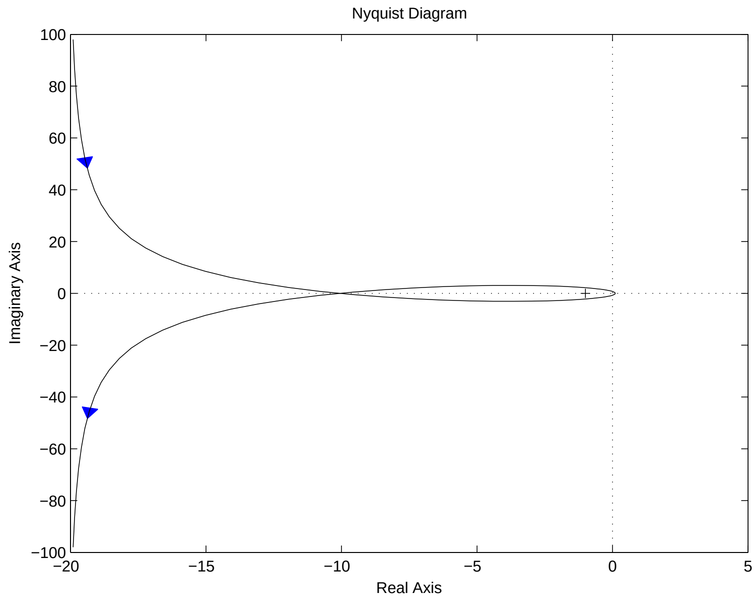
$$G(s) = 0.1\,\frac{(s+100)(s+1)}{s(s-1)} = -10\,\frac{(1+s)(1+10^{-2}s)}{s(1-s)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta uno polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale negativo con $1/T_1' = 100$ e $\mu_1' = 1$, uno zero reale negativo con $1/T_2' = 1$ e $\mu_2' = 1$, un polo reale positivo con $1/T = -1$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [4 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Una valutazione del punto di intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo evidenzia come tale punto si trovi in $-10 + j0$ e quindi alla sinistra di $-1 + j0$ (lo si vede già dai diagrammi di Bode). Ciò assicura che una volta riportato al finito il diagramma di Nyquist attraverso un percorso di Nyquist modificato compia un giro in verso antiorario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 1$. Poichè $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, e un polo semplice nell'origine, la condizione $N = 1$ assicura $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile.

Esercizio 3. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + s^2 + \left(\frac{9}{4} + a - a^2\right) s + \frac{9}{4}(1 - a).$$

Possiamo valutare per quali valori di a essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s)$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & \left(\frac{9}{4} + a - a^2\right) \\
2 & 1 & \frac{9}{4}(1 - a) \\
1 & \frac{13a}{4} - a^2 & 0 \\
0 & \frac{9}{4}(1 - a) & 0
\end{array}$$

Poichè i primi due elementi in prima colonna sono positivi, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{13a}{4} - a^2 > 0 \\ \\ \dfrac{9}{4}(1-a) > 0 \end{cases}$$

ovvero se e solo se $0 < a < 1$. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$0 < a < 1.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro a per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro a in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2+s}{s^3+s^2+\left(\frac{9}{4}+a-a^2\right)s+\frac{9}{4}(1-a)}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 0, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro a il polinomio al denominatore ha uno zero in 0 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 0 se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2+s}{s^3+s^2+\frac{9}{4}s} = \frac{s+1}{s^2+s+\frac{9}{4}}$$

e quindi, per la regola dei segni di Cartesio, essa ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in 0 < a \leq 1$.

ii) [3 punti] Per $a = 1$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3+s^2+\frac{9}{4}s = s\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2\right]$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) + c_2 e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{2}t\right) + c_3, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tale evoluzione libera risulta convergente se e solo se $c_3 = 0$. In tale ipotesi si ha

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{2}t\right) + c_2 e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{2}t\right), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} y(0^-) &= y_\ell(0^-) &&= c_1, \\ \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} &= \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} &&= \sqrt{2}c_2 - \frac{c_1}{2}, \\ \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} &= \left.\frac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} &&= -3\frac{c_2}{\sqrt{2}} - 3\frac{c_1}{4}. \end{aligned}$$

Da ciò segue

$$\left.\frac{d^2 y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} + \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -\frac{9}{4}y(0^-).$$

iii) [3 punti] L'evoluzione libera del sistema, in corrispondenza alle condizioni iniziali assegnate converge a zero, dal momento che soddisfa i vincoli determinati al punto precedente. Esiste, perciò, la risposta di regime permanente al segnale di ingresso assegnato. Tale risposta assume l'espressione

$$y_{rp}(t) = \left|W\left(\frac{j}{2}\right)\right| \sin\left(\frac{t}{2} + \arg W\left(\frac{j}{2}\right)\right)\delta_{-1}(t).$$

È facile verificare che

$$W\left(\frac{j}{2}\right) = \frac{1+j\frac{1}{2}}{2+j\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\left|W\left(\frac{j}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{\frac{4}{17}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{17}},$$

mentre

$$\arg\left(W\left(\frac{j}{2}\right)\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{4}\right).$$

iv) [2 punti] Operando in termini di trasformate di Laplace si trova

$$\frac{1}{s+1} = Y(s) = Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s+1}{s^2+s+\frac{9}{4}}\cdot U(s),$$

da cui

$$U(s) = \frac{s^2+s+\frac{9}{4}}{(s+1)^2} = 1 - \frac{1}{s+1} + \frac{9}{4}\frac{1}{(s+1)^2}.$$

Antitrasformando si trova

$$u(t) = \delta(t) - \left[e^{-t} - \frac{9}{4}t\cdot e^{-t}\right]\delta_{-1}(t).$$

Test. [5 punti] 1B 2 B 3B.