SECONDO COMPITINO DI ANALISI DEI SISTEMI
16 Dicembre 2005 - A.A. 2005/2006

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1-a & 0 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad -1 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Si calcolino, al variare di a in $\mathbb{R}$, i sottospazi di controllabilità in k passi per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 1$

ii) si determini, se possibile, un controllore dead-beat che renda la matrice $F + gK$ del sistema retroazionato nilpotente con indice di nilpotenza minimo;

iii) si progetti, se possibile, una retroazione dallo stato che attribuisca al risultante sistema retroazionato la funzione di trasferimento

$$w_K(z) = \frac{2}{z-1}.$$

[Suggerimento: il sistema non è raggiungibile, tuttavia la funzione di trasferimento dipende dal solo sottosistema raggiungibile per il quale, visto che il sistema è SISO ($p = m = 1$), valgono le consuete considerazioni relativamente alla struttura della funzione di trasferimento del sistema retroazionato].

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + [\,g_1 \;\mid\; g_2\,]\, u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]\, x(t). \end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, un controllore in retroazione dal solo primo ingresso, in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia polinomio caratteristico $(s + 1)^3$.

ii) Si progetti, se possibile, un controllore in retroazione, in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia asintoticamente stabile ed abbia come modi elementari esclusivamente esponenziali puri (i.e. del tipo $e^{\lambda_i t}$).

iii) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato in modo tale che l'errore di stima $e(t)$ sia combinazione lineare (per ogni $e(0)$) dei soli modi e^{-2t} e $t\ e^{-2t}$.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si dimostri che un sistema $\Sigma = (F, G, H)$, di dimensione n, è raggiungibile se e solo se la matrice $[\, zI_n - F \quad | \quad G\,]$ ha rango n per ogni $z \in \mathbb{C}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [5 punti] Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$\begin{aligned} X_1^R &= \mathrm{Im} G = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \\ X_2^R &= \mathrm{Im} [\, G \quad FG \,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1-a \\ -1 & 2a-1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Con riferimento a X_2^R si distinguono due casi: 1) per $a = 0$ le due colonne della matrice $[\, G \quad FG \,]$ sono linearmente dipendenti e pertanto

$$X_2^R = X_1^R = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

2) Per $a \neq 0$ le due colonne sono linearmente indipendenti e quindi

$$X_2^R = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Chiaramente ha senso esplorare il caso di raggiungibilità in tre passi solo per $a \neq 0$ e in quel caso si trova

$$X_3^R = \mathrm{Im} [\, G \quad FG \quad F^2G \,] = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = X_2^R.$$

Pertanto il sistema non è mai raggiungibile, tuttavia per $a = 0$ il sottospazio raggiungibile ha dimensione 1, mentre per $a \neq 0$ il sottospazio $X^R = X_2^R$ ha dimensione 2.

Valutiamo ora i sottospazi di controllabilità.

$$\begin{aligned} X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im} G\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} (1-a)x_1 + x_3 \\ 2ax_1 + x_2 - x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : (1-a)x_1 + x_3 = -(2ax_1 + x_2 - x_3) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -(1+a)x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1-a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

Per il calcolo del sottospazio di controllabilità in due passi distinguiamo il caso $a = 0$ dal caso $a \neq 0$. Per $a = 0$ si ha

$$\begin{aligned} X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im} [\, G \quad FG \,]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\ &= \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = X_1^C \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Pertanto, per $a = 0$ il sistema non è controllabile a zero. Per $a \neq 0$, invece,

$$\begin{aligned}
X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,]\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} (1-a)^2 x_1 + (1-a)x_3 \\ 2a(1-a)x_1 + 2ax_3 + 2ax_1 + x_2 - x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} (1-a)^2 x_1 + (1-a)x_3 \\ 2a(2-a)x_1 + (2a-1)x_3 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} = \mathbf{R}^3 \\
X_3^C &= X_2^C.
\end{aligned}$$

Pertanto il sistema (che non è mai raggiungibile) per $a \neq 0$ è controllabile a zero in due passi.

ii) [4 punti] Per $a = 1$ la coppia (F, G) diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e in base all'analisi condotta al punto i) sappiamo che tale coppia non è raggiungibile ma è controllabile a zero. Inoltre possiamo verificare facilmente che si tratta di una coppia in forma standard di raggiungibilità, dal momento che

$$\mathcal{R}_1 = [\,G_1 \quad F_{11}G_1\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

è non singolare. Se introduciamo la matrice $K = [\,k_0 \quad k_1 \quad k_2\,]$ in forma parametrica, ci accorgiamo (vista la struttura in forma standard) che $K = [\,K_1 \quad K_2\,]$ con $K_1 = [\,k_0 \quad k_1\,]$ che va scelta (in modo univoco) al fine di rendere la matrice $F_{11} + G_1K_1$ (e quindi $F + GK$) nilpotente. Mentre k_2 è un parametro di progetto che possiamo scegliere per minimizzare l'indice di nilpotenza della $F + GK$. Imponendo che

$$F_{11} + G_1K_1 = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 \\ 2 - k_0 & 1 - k_1 \end{bmatrix}$$

abbia polinomio caratteristico

$$\Delta_{F_{11}+G_1K_1}(z) = z^2 - (k_0 - k_1 + 1)z + (k_0 - 2k_1) = z^2,$$

si trova $k_0 = -2, k_1 = -1$. Se ora valutiamo la matrice $F + GK$ in corrispondenza a quei due valori dei parametri k_0 e k_1 e per k_2 arbitrario otteniamo

$$F = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 + k_2 \\ 4 & 2 & -1 - k_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

È immediato rendersi conto che questa matrice non sarà mai nulla e pertanto non avrà mai indice di nilpotenza 1. Tuttavia non appena imponiamo $1 + k_2 = 0$ la matrice diventa diagonale a blocchi, con blocchi diagonali nilpotenti, uno di indice 1 e uno di indice 2. Pertanto per $k_2 = -1$, ovvero

$$K = [\,-2 \quad -1 \quad -1\,],$$

$F + GK$ ha indice di nilpotenza 2 che è il minimo possibile.

iii) [4 punti] Osserviamo, in primo luogo, che la funzione di trasferimento del sistema dipende dal solo sottosistema raggiungibile e quindi, al fine di modificare mediante retroazione la funzione di trasferimento del sistema, ha senso prendere in esame il solo sottosistema raggiungibile. È inoltre noto dalla teoria che la retroazione dallo stato nel caso di sistemi SISO (quale può essere considerato il sistema (F_{11}, G_1, H_1)) porta ad una funzione di trasferimento il cui numeratore rimane sempre invariato e il cui denominatore varia liberamente (purchè si assuma come descrizione per la funzione di trasferimento quella, senza semplificazioni, ottenibile dalle tre matrici del sistema). La funzione di trasferimento della terna (F_{11}, G_1, H_1) (e quindi dell'intero sistema) risulta essere

$$w(z) = w_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 \\ -2 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2z-3}{z(z-1)}.$$

La funzione di trasferimento per il sistema retroazionato $(F_{11}+G_1K_1, G_1, H_1)$ (e quindi per l'intero sistema retroazionato), diventa, al variare di $K_1 = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 \end{bmatrix}$, un'espressione del tipo:

$$w_K(z) = w_{1,K_1}(z) = 2\frac{z - \frac{3}{2}}{z^2 + a_1 z + a_0}.$$

Pertanto è evidente che imponendo $\Delta_{F_{11}+G_1K_1}(z) = (z-1)\left(z - \frac{3}{2}\right)$ perveniamo al risultato desiderato. Ciò corrisponde a imporre

$$\Delta_{F_{11}+G_1K_1}(z) = z^2 - (k_0 - k_1 + 1)z + (k_0 - 2k_1) = z^2 - \frac{5}{2}z + \frac{3}{2},$$

e porta quindi a

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & k_2 \end{bmatrix}, \qquad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. i) [3.5 punti] Se osserviamo la coppia (F, g_1), dove g_1 è la prima colonna di G, è immediato verificare che tale coppia non è raggiungibile, dal momento che la matrice di raggiungibilità della coppia, i.e.

$$\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} g_1 & | & Fg_1 & | & F^2 g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è singolare. Tuttavia tale coppia è anche in forma standard di raggiungibilità e quindi la matrice del sottosistema non raggiungibile F_{22} coincide con -1. Pertanto il problema ha soluzione. Se pongo $k_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$, e considero il polinomio caratteristico della matrice relativa al solo sottosistema raggiungibile

$$F_{11} + g_{11} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b+1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

ovvero $\Delta_{F_{11}+g_{11}[a \quad b]}(s) = s^2 - (a+1)s + (a - 2b - 2)$, e impongo $\Delta_{F_{11}+g_{11}[a \quad b]}(s) \equiv (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$, ottengo $a = -3, b = -3$. In altre parole, $k_1 = \begin{bmatrix} -3 & -3 & c \end{bmatrix}$, con c arbitrario in $\mathbb{R}$.

ii) [4 punti] Il sistema è raggiungibile da entrambi gli ingressi perciò è stabilizzabile e i suoi autovalori possono essere allocati liberamente. ma allora è sufficiente allocarli in corrispondenza a tre valori reali negativi distinti e certamente sarà garantita sia la stabilità asintotica che il carattere puramente esponenziale dei suoi modi. Scegliamo, ad esempio,

$$p(s) = (s+1)(s+2)(s+3).$$

Sia

$$K = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Si vede a occhio che imponendo ad $F+GK$ di essere triangolare a blocchi, con blocco F_{11} di dimensione 2×2 e polinomio caratteristico $(s+1)(s+2) = s^2+3s+2$, e F_{22} di dimensione 1×1 e coincidente con -3 si ottiene esattamente il risultato desiderato. Pertanto, posto

$$F+GK = \begin{bmatrix} a_0 & 1+a_1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

(che corrisponde ad aver assunto

$$K = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix})$$

imponendo

$$s^2 - (a_0+1)s + (a_0 - 2a_1 - 2) = s^2+3s+2$$

si trova $a_0 = -4 = a_1$ e quindi

$$K = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

iii) [4 punti] Il calcolo della matrice di osservabilità fornisce

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pertanto il sistema è osservabile e scegliendo opportunamente la matrice di guadagno dello stimatore L è possibile allocare liberamente gli autovalori della matrice $F+LH$. In particolare, il vincolo sui modi richiede che tutti gli autovalori della matrice $F+LH$ siano collocati in -2. Posto $L = [\,a \quad b \quad c\,]^T$ si trova

$$F+LH = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 2+b & 1 & 1 \\ c & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è $\Delta_{F+LH}(s) = s^3 - as^2 - (3+b)s + (a-b-c-2)$. Imponendo che esso coincida con $p(s) = (s+2)^3 = s^3+6s^2+12s+8$ si trova

$$L = [\,-6 \quad -15 \quad -1\,]^T.$$

Andiamo ora a valutare i modi della matrice $F+LH$. Poiché

$$F+LH = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -13 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è immediato verificare che l'autospazio relativo all'autovalore -2 per questa matrice è

$$\ker(-2I_3 - (F+LH)) = \ker \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 13 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ed ha dimensione unitaria. Ma allora la forma di Jordan della matrice $F+LH$ è

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e quindi i modi della matrice sono $e^{-2t}, t\ e^{-2t}, \frac{t^2}{2!}e^{-2t}$. Pertanto il problema posto non ha soluzione.

Teoria. [5.5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.