COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
21 Settembre 2005

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Fx(t) + [\,g_1 \mid g_2\,]\,u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]\, x(t),
\end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Si progetti, se possibile e al variare di a, un controllore in retroazione, in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia come modi elementari esclusivamente e^{-t} e $t \cdot e^{-t}$.

ii) Si progetti, se possibile, un controllore in retroazione dal solo primo ingresso, in modo tale che la matrice di trasferimento del risultante sistema retroazionato $(F + g_1 k_1, G, H)$ abbia come prima componente

$$w_1^{k_1}(s) = \frac{1}{s^3 - s^2 + 1}.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t),
\end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Si progetti, se possibile e al variare di a, un controllore in retroazione K, in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia come polinomio caratteristico

$$\Delta_{F+gK}(z) = z(z - 1/2)(z - 1/4).$$

ii) Si determini, se possibile e al variare di a, l'insieme dei controllori dead-beat che portano ad una matrice $F + gK$ con indice di nilpotenza esattamente 3, esattamente 2 ed esattamente 1.

iii) Si determinino, al variare di a, gli autovalori del sottosistema non osservabile e la relativa molteplicità.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controlloreesista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore.

Esercizio 3. Si consideri il modello di stato a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= F\mathbf{x}(k) + Gu(k) &&= \begin{bmatrix} -3a - 3 & 1 \\ 0 & -1 + a^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k), \\
y(k) &= H\mathbf{x}(k) &&= [\,1 \quad 0\,]\, \mathbf{x}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,
\end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la forma di Jordan della matrice F e si studino stabilità semplice, asintotica e BIBO del sistema;

ii) per $a = 0$ si determini l'evoluzione forzata di uscita del sistema in corrispondenza alla successione di ingresso

$$\mathbf{u}(k) = \begin{cases} 2^k, & \text{per } k \in \mathbb{Z}_+, k \text{ pari}, \\ 0, & \text{per } k \in \mathbb{Z}_+, k \text{ dispari}. \end{cases}$$

Teoria. Sia

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \qquad t \in \mathbb{N},$$

un sistema dinamico a tempo discreto di dimensione n, ad m ingressi, e siano x_0 e x_f due arbitrari stati in $\mathbb{R}^n$. Supponendo il sistema non raggiungibile, si illustri la procedura per verificare se esiste un ingresso di controllo che porta lo stato del sistema da x_0 per $t = 0$ a x_f per $t = n$, e qualora tale ingresso esista se ne determini l'espressione generica.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] Distinguiamo due casi: 1) $a = 0$ e 2) $a \neq 0$. Nel caso 1) il sistema ha due ingressi linearmente dipendenti ed è raggiungibile. In questo caso è come se il sistema avesse un solo ingresso e per ogni scelta della matrice di retroazione K la matrice del sistema risultante retroazionato risulterà ciclica e quindi il problema posto non ha soluzione.

Nel caso 2), invece, disponiamo di due ingressi linearmente indipendenti con i quali siamo in grado di allocare in modo completamente arbitrario le ultime due righe della matrice $F + GK$. Se attribuiamo alla matrice $F + GK$ la seguente forma:

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è facile rendersi conto del fatto che la matrice $F + GK$ avrà come forma di Jordan proprio

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ciò è possibile scegliendo

$$K = \begin{bmatrix} -3 - 1/a & -3 & 2/a \\ 1/a & 0 & -2/a \end{bmatrix}.$$

ii) [4 punti] È noto dalla teoria che la retroazione dallo stato nel caso di sistemi SISO (quale può essere considerato il sistema (F_1, g_1, H_1)) porta ad una funzione di trasferimento il cui numeratore rimane sempre invariato e il cui denominatore varia liberamente (purchè si assuma come descrizione per la funzione di trasferimento quella, senza semplificazioni, ottenibile dalle tre matrici del sistema). La funzione di trasferimento della terna (F_1, g_1, H_1) risulta essere

$$w_1(s) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -2 & s-1 & 0 \\ 1 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{s-1}{(s-1)(s^2 - s - 2)}.$$

La funzione di trasferimento dal primo ingresso all'uscita, per il sistema retroazionato dal solo primo ingresso, diventa, al variare di k_1, un'espressione del tipo:

$$w_1^{k_1}(s) = \frac{s-1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Pertanto è evidente che non esiste retroazione dal solo primo ingresso (equivalentemente, nessuna scelta di a_2, a_1 e a_0) tale che

$$\frac{s-1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{s^3 - s^2 + 1}.$$

Esercizio 2. i) [2 punti] La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed ha, pertanto, rango 1. Ciò significa che il sistema non è raggiungibile ed il suo sottosistema non raggiungibile ha dimensione 2. Poichè il polinomio caratteristico della matrice F è

$$\Delta_F(z) = z[(z-1)^2 - 1] = z^2(z-2)$$

il polinomio caratteristico della matrice F_{22} del sottosistema non raggiungibile sarà

$$\Delta_{F_{22}}(z) = z^2$$

oppure

$$\Delta_{F_{22}}(z) = z(z-2).$$

Nessuno dei 2 divide il polinomio caratteristico assegnato e pertanto non esiste un controllore in retroazione che attribuisce alla matrice del sistema retroazionato il polinomio caratteristico desiderato.

ii) [5 punti] È necessario, a questo punto, valutare in modo esatto gli autovalori del sottosistema non raggiungibile. Dal momento che $\Delta_F(z) = z^2(z-2)$, il sistema ammette controllori dead-beat se e solo se la matrice PBH di raggiungibilità del sistema non perde rango in corrispondenza all'autovalore 2. Ciò è verificato dal momento che

$$[\,zI_3 - F \quad | \quad g\,]|_{z=2} = \left.\begin{bmatrix} z-1 & -1 & -1 & | & 1 \\ -1 & z-1 & -a & | & 1 \\ 0 & 0 & z & | & 0 \end{bmatrix}\right|_{z=2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 1 \\ -1 & 1 & -a & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 3.
La soluzione più semplice consiste nello scrivere il controllore K in forma parametrica

$$K = [\,k_0 \quad k_1 \quad k_2\,]$$

e nell'imporre alla matrice $F + gK$ polinomio caratteristico z^3. Successivamente valuteremo, al variare dei parametri che rendono soddisfatta tale condizione, qual'è l'indice di nilpotenza attribuito alla matrice $F + gK$. Si trova

$$F + gK = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\,k_0 \quad k_1 \quad k_2\,] = \begin{bmatrix} 1+k_0 & 1+k_1 & 1+k_2 \\ 1+k_0 & 1+k_1 & a+k_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\Delta_{F+gK}(z) = z^2[z - (2 + k_0 + k_1)].$$

Pertanto i controllori dead-beat per il sistema sono tutti e soli quelli del tipo

$$K = [\,k_0 \quad -(2+k_0) \quad k_2\,]$$

al variare di k_0 e k_2 in $\mathbb{R}$. La matrice $F + gK$ diventa allora

$$F + gK = \begin{bmatrix} 1+k_0 & -(1+k_0) & 1+k_2 \\ 1+k_0 & -(1+k_0) & a+k_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice può presentare indice di nilpotenza 1 (ovvero essere la matrice nulla) se e solo se $a = 1$ e $k_0 = k_2 = -1$. Se $a \neq 1$ non c'è modo di attribuire alla matrice indice di nilpotenza 1.

Per valutare i controllori che attribuiscono indice di nilpotenza 2 alla matrice è sufficiente elevare $F + gK$ al quadrato. Si trova, allora,

$$(F + gK)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1+k_0)(1-a) \\ 0 & 0 & (1+k_0)(1-a) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da ciò segue che, per $a = 1$, ogni scelta di k_0 (e di k_2) va bene e attribuisce come indice di nilpotenza alla matrice $F + gK$ (almeno) 2. Per essere sicuri di avere indice di nilpotenza esattamente 2 devo escludere la soluzione $k_0 = k_2 = -1$ determinata prima. Per $a \neq 1$, invece, ottengo indice di nilpotenza esattamente 2 imponendo $k_0 = -1$ e k_2 arbitrario. Infine, ogni altra scelta di k_0 e k_2

nel caso $a \neq 1$ attribuirà alla matrice $F + gK$ indice di nilpotenza 3. Per $a = 1$ tale indice di nilpotenza non è ottenibile per nessuna scelta dei parametri.

iii) [3.5 punti] La matrice PBH di osservabilità è

$$\begin{bmatrix} zI_3 - F \\ H \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} z-1 & -1 & -1 \\ -1 & z-1 & -a \\ 0 & 0 & z \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Lo spettro della matrice F, d'altra parte, è $(0, 0, 2)$. Per $z = 0$ otteniamo

$$\left.\begin{bmatrix} zI_3 - F \\ H \end{bmatrix}\right|_{z=0} = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

il cui rango è sempre 2 pertanto 0 è sempre autovalore del sottosistema non osservabile. Per $z = 2$, invece, otteniamo

$$\left.\begin{bmatrix} zI_3 - F \\ H \end{bmatrix}\right|_{z=2} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

il cui rango è sempre pari a 3. Se ora prendiamo in esame la matrice di osservabilità del sistema

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1+a \\ 4 & 4 & 2(1+a) \end{bmatrix}$$

ci accorgiamo che tale matrice ha rango 1 per $a = -1$ e rango 2 per $a \neq -1$. Ma allora $\sigma(F_{22}) = (0)$ per $a \neq -1$ e $\sigma(F_{22}) = (0, 0)$ per $a = -1$.

Esercizio 3. i) [5 punti] Distinguiamo a seconda che i due autovalori della matrice F, $\lambda_1 = -3a - 3$ e $\lambda_2 = -1 + a^2$, siano distinti o coincidenti. Se $\lambda_1 = \lambda_2$, ovvero $-1 + a^2 = -3a - 3$, ovvero $a = -1, -2$, allora la matrice F è già in forma di Jordan e presenta un solo miniblocco di dimensione 1 relativamente all'autovalore in esame. Specificatamente, per $a = -1$ si trova

$$F = J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e per $a = -2$ si trova

$$F = J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se, invece, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ovvero $a \neq -1, -2$, allora la matrice F è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} -3a-3 & 0 \\ 0 & -1 + a +^2 \end{bmatrix}.$$

Valutiamo sotto quali condizioni entrambi gli autovalori hanno modulo minore di 1. Si trova che le due condizioni

$$\begin{cases} |a^2 - 1| < 1 \\ |3a + 3| < 1 \end{cases}$$

sono verificate se e solo se $-4/3 < a < -2/3$. Per $a = -4/3$ la matrice F presenta un autovalore di modulo minore di 1 ed uno (semplice) in 1, per cui si ha stabilità semplice. Per $a = 2/3$ la matrice F presenta un autovalore di modulo minore di 1 ed uno (semplice) in -1, per cui si ha stabilità semplice. Per valori esterni all'intervallo $[-4/3, -2/3]$ si ha sicuramente instabilità.

Valutiamo ora la stabilità BIBO del sistema. Certamente per i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica si ha pure stabilità BIBO. Vediamo ora se esistono dei valori del parametro

a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$\begin{aligned}
W(z) &= H(zI_2 - F)^{-1}G = [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} z-(-3-3a) & -1 \\ 0 & z-(-1+a^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(z+3a+3)(z+1-a^2)} [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} z-(-1+a^2) & 1 \\ 0 & (z-(-3a-3)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{z+3-a^2}{(z+3a+3)(z+1-a^2)}.
\end{aligned}$$

Le cancellazioni posso sorgere se e solo se $3a+3 = 3-a^2$ (e in tal caso si trova $W(z) = 1/(z+1-a^2)$). Questa equazione di secondo grado ha due soluzioni ovvero $a = 0$ e $a = -3$. In corrispondenza alla soluzione $a = 0$ si trova

$$W(z) = \frac{1}{z+1}$$

e il polo della $W(z)$ ha modulo 1 per cui il sistema non è BIBO stabile. In corrispondenza alla soluzione $a = -3$ si trova, invece,

$$W(z) = \frac{1}{z-8}$$

e il polo della $W(z)$ ha modulo maggiore di 1 per cui il sistema non è BIBO stabile. Pertanto non c'è stabilità BIBO senza la stabilità asintotica.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ la matrice del sistema diventa

$$F = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La successione di ingresso ha trasformata zeta

$$U(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{2i} z^{-2i} = \sum_{i=0}^{+\infty} (4z^{-2})^i = \frac{z^2}{z^2-4}.$$

La funzione di trasferimento del sistema vale $W(z) = \frac{1}{z+1}$. Si trova, allora,

$$Y(z) = W(z)U(z) = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{z^2}{z^2-4} = \frac{1}{3}\frac{z}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{z}{z+2} + \frac{1}{6}\frac{z}{z-2},$$

a cui corrisponde la successione di uscita

$$y(k) = \left[\frac{1}{3}(-1)^k - \frac{1}{2}(-2)^k + \frac{1}{6}2^k\right] \delta_{-1}(k).$$

Teoria. [4 punti] Si veda il testo "Appunti di Teoria dei Sistemi", di E.Fornasini e G.Marchesini, nel capitolo sulla Raggiungibilità.