

# COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI

## 6 Settembre 2005

**Esercizio 1.** Dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [1 \quad -1 \quad 0] x(t)\end{aligned}$$

i) si progetti, se possibile, uno stimatore dello stato il cui errore di stima  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  abbia sempre un'evoluzione di tipo puramente esponenziale, ovvero per ogni condizione iniziale  $e(0)$  valga  $e(t) = e^{\lambda t} \cdot e(0), t \geq 0$ , per qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

ii) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato il cui errore di stima evolva come combinazione lineare dei soli modi

$$e^{-t}, e^{-2t}.$$

iii) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato che renda il sistema retroazionato BIBO stabile.

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$

con  $a$  parametro reale.

i) Si determinino, al variare di  $a$  in  $\mathbb{R}$ , i sottospazi di raggiungibilità del sistema  $X_k^R$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , e si studi raggiungibilità e controllabilità a zero del sistema;

ii) Si dica, al variare di  $a$  in  $\mathbb{R}$ , se esiste  $k \in \mathbb{Z}_+$  e una successione di ingresso  $u(0), u(1), \dots, u(k-1)$ , che porti lo stato del sistema da  $x_0 = [1 \quad 1 \quad 0]^T$  per  $t = 0$  allo stato  $x_f = [0 \quad 0 \quad a]^T$  per  $t = k$ , e in caso affermativo se ne determini una corrispondente al  $k$  minimo possibile.

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalla seguente equazione:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [1 \quad 0 \quad a-3] x(t).\end{aligned}$$

i) Si determini al variare di  $a$  in  $\mathbb{R}$  la forma di Jordan della matrice  $F$  e si studi la stabilità asintotica/semplice e BIBO del sistema.

iii) Assumendo  $a = 0$ , si determini l'evoluzione forzata dello stato in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \begin{bmatrix} (1+2t) \cdot \delta_{-1}(t) \\ e^{-3t} \cdot \delta_{-1}(t) \end{bmatrix}.$$

**NOTA:** Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

**Teoria.** Si dimostri che per un sistema  $\Sigma = (F, G, H)$ , di dimensione  $n$ , a tempo continuo, sono fatti equivalenti:

1.  $\Sigma$  è stabilizzabile, ovvero ammette un controllore in retroazione  $K$  stabilizzante;
2. la matrice del criterio PBH di raggiungibilità ha rango pieno in corrispondenza ad ogni punto  $s \in \mathbb{C}$  con  $\text{Re}(s) \geq 0$ ;
3. la matrice  $F_{22}$  del sottosistema non raggiungibile di  $\Sigma$  ha tutti gli autovalori a parte reale minore di zero.

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [3 punti] Osserviamo che il sistema è in forma standard di osservazione e l'unico autovalore del sottosistema non osservabile è l'autovalore  $-1$ , il problema ha soluzione se e solo se esiste uno stimatore il cui guadagno  $L$  è tale che  $F + LH$  è simile alla matrice  $(-1)I_3$  e pertanto coincide con essa. Posto

$$L = [\ell_1 \quad \ell_2 \quad \ell_3]^T$$

la matrice  $F + LH$  assume la seguente espressione

$$F + LH = \begin{bmatrix} -1 + \ell_1 & -\ell_1 & 0 \\ -1 + \ell_2 & 2 - \ell_2 & 0 \\ \ell_3 & -1 - \ell_3 & -1 \end{bmatrix}.$$

È immediato pertanto rendersi conto del fatto che per nessuna scelta dei parametri  $\ell_1, \ell_2$  ed  $\ell_3$  tale matrice potrà coincidere con la matrice  $-I_3$ .

ii) [4.5 punti] Per quanto detto prima, il sottosistema non osservabile ha un unico autovalore posizionato in  $-1$ , compatibile con la richiesta sullo stimatore. Si tratta di scegliere la matrice  $L$  dello stimatore, se possibile, in modo tale che la matrice  $F + LH$  abbia polinomio minimo  $\psi_{F+LH}(s) = (s+1)(s+2)$ . Tale polinomio minimo è compatibile con due polinomi caratteristici, ovvero  $(s+1)^2(s+2)$  e  $(s+1)(s+2)^2$ . Siccome il sistema è in forma standard di osservazione, partizioniamo, per comodità, la matrice  $L$  in modo consono nella forma

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}.$$

Poichè la coppia

$$F_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad H_1 = [1 \quad -1]$$

è osservabile, se attribuiamo alla matrice

$$F_{11} + L_1 H_1$$

polinomio caratteristico  $(s+2)^2$  allora la matrice  $F_{11} + L_1 H_1$  risulterebbe ciclica e quindi la forma di Jordan di  $F + LH$  avrebbe un solo miniblocco di dimensione 2 relativo all'autovalore  $-2$ . Pertanto non possiamo che attribuire a  $F_{11} + L_1 H_1$  il polinomio caratteristico  $(s+1)(s+2)$ . Vediamo allora se esiste  $L_2$  tale che  $F + LH$  abbia il polinomio minimo desiderato. Posto  $L_1 = [a \ b]^T$ , si trova

$$F_{11} + L_1 H_1 = \begin{bmatrix} -1 + a & -a \\ -1 + b & 2 - b \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\Delta_{F_{11} + L_1 H_1}(s) = s^2 + (b - a - 1)s + (b + a - 2).$$

Imponendo

$$s^2 + (b - a - 1)s + (b + a - 2) = (s + 1)(s + 2) = s^2 + 3s + 2$$

si trova  $a = 0$  e  $b = 4$ .

La matrice  $F + LH$  diventa allora

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ c & -1 - c & -1 \end{bmatrix}.$$

Scegliamo ora, se possibile,  $c \in \mathbb{R}$  in modo tale che la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore  $-1$  sia 2, ovvero ci siano due miniblocchi di Jordan di dimensione 1 relativi all'autovalore  $-1$ . Si trova

$$-I_3 - (F + LH) = -I_3 - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ c & -1 - c & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -c & 1 + c & 0 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 1 se e solo se

$$-3(1+c) + c = 0$$

ovvero

$$c = -3/2.$$

Pertanto il problema ha soluzione e lo stimatore cercato è

$$L = [0 \quad 4 \quad -3/2]^T.$$

iii) [3 punti] Osservo che, essendo il sistema raggiungibile, posso rendere il sistema retroazionato asintoticamente stabile e quindi, a maggior ragione, BIBO stabile. Se pongo

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

la matrice  $F + GK$  risulta

$$\begin{bmatrix} -1 - k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -1 + k_1 & 2 + k_2 & k_3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Imponendo, ad esempio,  $k_1 = 1$  la matrice  $F + GK$  diventa triangolare a blocchi e il polinomio caratteristico diventa

$$\Delta_{F+GK}(s) = (s+2)[(s-2-k_2)(s+1)+k_3] = (s+2)(s^2 + (-1-k_2)s + (k_3 - k_2 - 2)).$$

Applicando Cartesio al polinomio di secondo grado posso dire che il polinomio risultante è di Hurwitz se e solo se

$$-1 - k_2 > 0 \quad \text{e} \quad k_3 - k_2 - 2 > 0.$$

Imponendo, ad esempio,  $\Delta_{F+GK}(s) = (s+2)^3$ , si ottiene  $k_2 = -5$  e  $k_3 = 1$  da cui

$$K = [1 \quad -5 \quad 1].$$

**Esercizio 2.** i) [3 punti] Valutiamo i sottospazi di raggiungibilità:

$$\begin{aligned} X_1^R &= \text{Im}g = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \\ X_2^R &= \text{Im}[g \quad Fg] = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \\ X_3^R &= \text{Im}[g \quad Fg \quad F^2g] = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{4} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Si trova, allora, per  $a = 0$  che

$$X_3^R = X_2^R = X^R = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

per  $a \neq 0$

$$X_3^R = X^R = \mathbb{R}^3.$$

Pertanto si ha raggiungibilità se e solo se  $a \neq 0$ , tuttavia per  $a = 0$  è immediato rendersi conto del fatto che il sistema è in forma standard di raggiungibilità con  $F_{22} = 0$ , e pertanto il sistema è controllabile a zero per ogni valore di  $a \in \mathbb{R}$ .

ii) [4 punti] Dall'analisi precedente risulta evidente che per  $a \neq 0$  il sistema è raggiungibile e quindi il problema è risolvibile sempre (in al più tre passi). D'altra parte per  $a = 0$  il sistema è solo controllabile a zero ma anche lo stato finale diventa lo stato nullo e pertanto il problema è risolvibile (in al più due passi). Per  $k = 1$  si trova

$$x_f - Fx_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/4 \\ 0 \end{bmatrix} \notin X_1^R$$

e quindi il problema non è risolvibile. Per  $k = 2$  si trova

$$x_f - F^2x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ a/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 3a/4 \end{bmatrix}$$

che appartiene a  $X_2^R$  per  $a = 0$  e non vi appartiene per  $a \neq 0$ . Per  $a = 0$  imponendo

$$\begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 3a/4 \end{bmatrix} = x_f - F^2x_0 = [g \quad Fg] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

si trova  $u(0) = -1$  e  $u(1) = -1/4$ . Infine per  $a \neq 0$  e  $k = 3$  imponendo

$$\begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/16 \\ 3a/4 \end{bmatrix} = x_f - F^3x_0 = [g \quad Fg \quad F^2g] \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

si trova  $u(0) = 3$ ,  $u(1) = -1/4$  e  $u(2) = -1$ .

**Esercizio 3.** i) [4.5 punti] È immediato verificare che la matrice  $F$  ha tre autovalori dei quali due collocati in  $-2$  e uno collocato in  $a - 2$ . Pertanto per  $a = 0$  la matrice ha un solo autovalore distinto di molteplicità 3, mentre per  $a \neq 0$  ha due autovalori distinti di cui uno doppio in  $-2$  e uno semplice in  $a - 2$ . Poiché la matrice è diagonale a blocchi, la forma di Jordan della matrice  $F$  è la “somma diretta” delle forme di Jordan dei due miniblocchi, ovvero per  $a = 0$  è

$$J_{a=0} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

mentre per  $a \neq 0$  è (a meno di un riordino dei miniblocchi)

$$J_{a \neq 0} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se  $a - 2 < 0$ , ovvero  $a < 2$ , ed è semplicemente stabile se e solo se  $a \leq 2$ . Per quanto concerne la BIBO stabilità, il calcolo della funzione di trasferimento del sistema porta a

$$\begin{aligned} W(s) &= H(sI_3 - F)^{-1}G = [1 \quad 0 \quad a-3] \begin{bmatrix} s+2 & 0 & 0 \\ 0 & s+2-a & 0 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [1 \quad 0 \quad a-3] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2-a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)(s+2-a)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[ \frac{1}{s+2} \quad (a-3) \frac{s+3-a}{(s+2)(s+2-a)} \right] \end{aligned}$$

Chiaramente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori di  $a$  per cui c'è stabilità asintotica; non ci possono essere cancellazioni utili che permettono di avere stabilità BIBO anche quando non c'è

stabilità asintotica, tuttavia per  $a = 3$  il secondo termine della matrice di trasferimento si annulla e il sistema diventa BIBO stabile pur non essendo asintoticamente stabile. Pertanto il sistema è BIBO stabile per  $a < 2$  e  $a = 3$ .

ii) [3 punti] Attraverso le trasformate di Laplace otteniamo

$$U(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}.$$

La trasformata di Laplace dello stato in evoluzione forzata è legata a quella dell'ingresso dalla relazione

$$\begin{aligned} X_f(s) &= (sI_3 - F)^{-1}GU(s) = \begin{bmatrix} s+2 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 0 & -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+2)^2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2} \\ \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{1}{(s+2)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Antitrasformando termine a termine si trova

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} &\rightarrow x_1(t) = t \cdot \delta_{-1}(t) \\ \frac{1}{(s+2)(s+3)} &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \rightarrow x_2(t) = (e^{-2t} - e^{-3t}) \cdot \delta_{-1}(t) \\ \frac{1}{(s+2)^2} &\rightarrow x_3(t) = t \cdot e^{-2t} \delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

**Teoria.** [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Controllo in retroazione.