

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

14 Aprile 2005

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 10 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 100u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

- i) Si determini l'evoluzione libera del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = -1, \quad \frac{dy(0^-)}{dt} = 11, \quad \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = -100.$$

- ii) Si determini (in termini approssimativi) la risposta impulsiva del sistema, $g(t)$.
 iii) Si tracci il diagramma di Bode della risposta in frequenza del sistema $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$.
 iv) Si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$ di tipo PD, e quindi con la seguente struttura

$$C(s) = K_p + K_d s,$$

in modo tale che a) il risultante sistema retroazionato risponda al gradino unitario in ingresso con errore di regime permanente non superiore a $e_{rp}^* = 10^{-3}$, b) la pulsazione di attraversamento del sistema in catena aperta sia all'incirca $\omega_A^* = 100$ rad/sec e c) il margine di fase (del sistema in catena aperta) sia almeno pari a 45° .

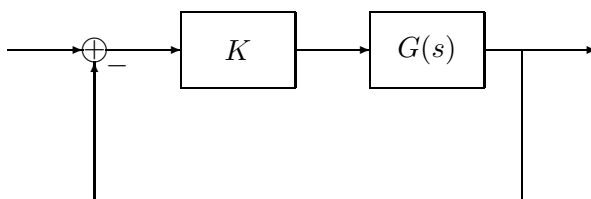
Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + (2a + 1) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (2a + a^2) \frac{dy(t)}{dt} + a^2 y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Detta $G(s)$ la funzione di trasferimento del sistema (1) valutato per $a = 1$, si supponga di applicare al sistema un controllo in retroazione (unitaria negativa) sulla cui catena di azione diretta agisca un controllore proporzionale K come illustrato in figura:



- ii) Si studi al variare di $K \neq 0$ la stabilità BIBO del sistema retroazionato, evidenziando gli eventuali valori critici del parametro K , facendo uso della famiglia dei diagrammi di Nyquist di $KG(j\omega)$, $K \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si tracci il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza del sistema di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s(s+1)}{s^2+1}.$$

Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 10s^2 + s + 10 = s^2(s + 10) + (s + 10) = (s^2 + 1)(s + 10),$$

ed ha tre radici semplici $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = j, \lambda_3 = -j$ a cui corrispondono i tre modi (reali)

$$e^{-10t}, \cos t, \sin t.$$

L'evoluzione libera assume, dunque, la seguente espressione generica:

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-10t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Particolarizzando la precedente espressione alle specifiche condizioni iniziali assegnate si trova

$$\begin{aligned} -1 &= y(0^-) = y_\ell(0^-) = c_1 + c_2 \\ 11 &= \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell(0^-)}{dt} = -10c_1 + c_3 \\ -100 &= \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = \frac{d^2y_\ell(0^-)}{dt^2} = 100c_1 - c_2. \end{aligned}$$

Si trova, facilmente, $c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = 1$, a cui corrisponde

$$y_\ell(t) = -e^{-10t} + \sin t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

ii) [3 punti] Dall'equazione differenziale che descrive la dinamica del sistema è immediato derivare l'espressione della funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{s + 100}{(s + 10)(s^2 + 1)}.$$

Dalla decomposizione di $G(s)$ nella forma

$$G(s) \approx 0.9 \frac{1}{s + 10} + \frac{-0.9s + 10}{s^2 + 1}$$

segue immediatamente

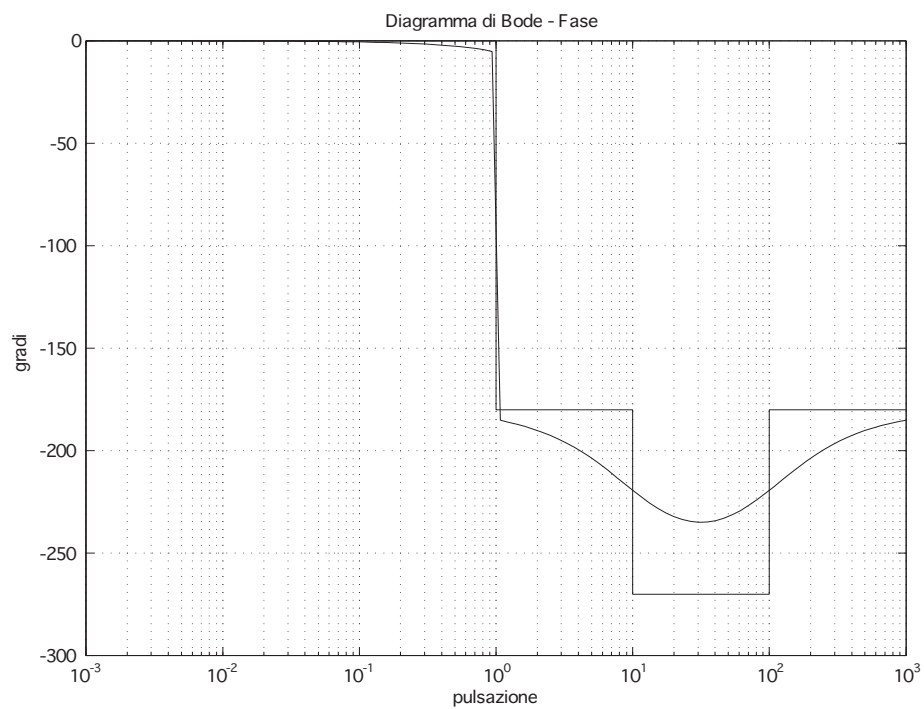
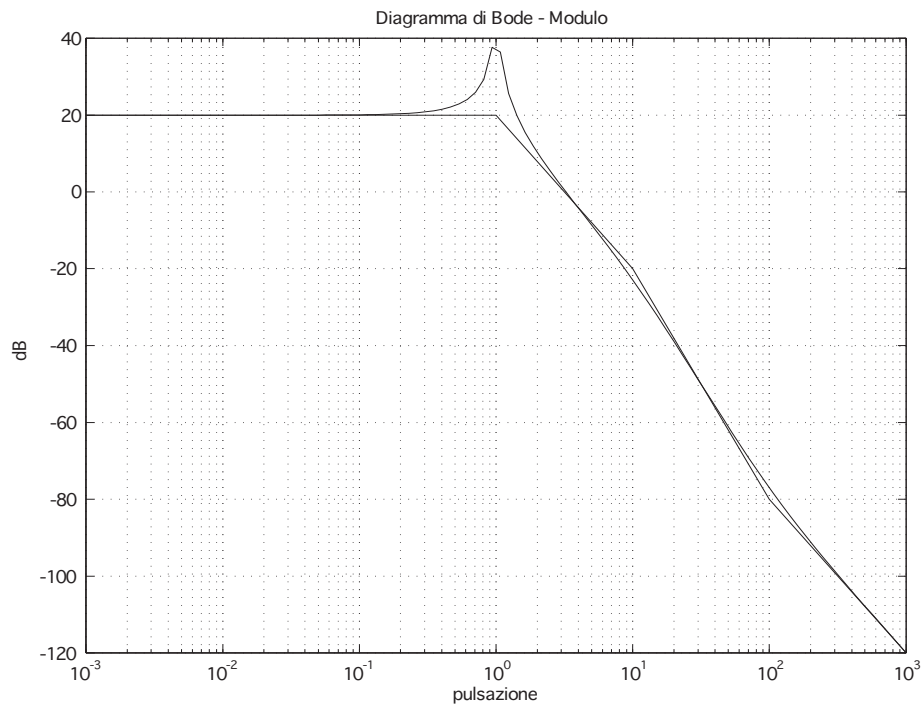
$$g(t) \approx [0.9e^{-10t} - 0.9 \cos t + 10 \sin t] \delta_{-1}(t).$$

iii) [4 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode;

$$W(s) = 10 \frac{1 + \frac{s}{100}}{(1 + \frac{s}{10})(1 + s^2)}.$$

Essa presenta guadagno di Bode di 10 (20 dB), uno zero reale negativo semplice con pulsazione di taglio pari a 100 rad/s, un polo reale negativo semplice con pulsazione di

taglio 10 rad/s e, infine, una coppia di poli immaginari coniugati di pulsazione $\omega_n = 1$. Il risultato è illustrato in figura



iv) [5 punti] Il sistema è di tipo 0 e non viene chiesto di modificarne il tipo. L'errore

di regime permanente in questo caso assume l'espressione

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)K_B(G)},$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode del processo $G(s)$, il cui valore (cfr. parte ii) di questo esercizio) è 10, mentre $K_B(C)$ è il guadagno di Bode del controllore, parametro da fissare. Il controllore PD può essere riscritto nella forma

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s \right),$$

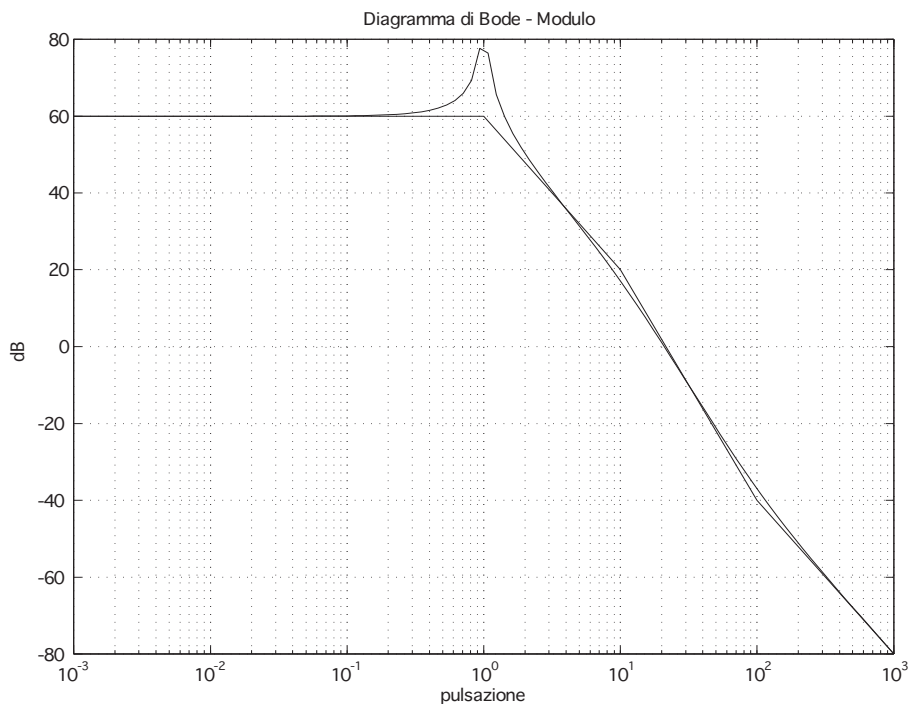
e, pertanto, K_p rappresenta il guadagno di Bode del controllore. Pertanto, se vogliamo che il sistema retroazionato sia di tipo 0 con errore di regime permanente al più 10^{-3} , è sufficiente imporre

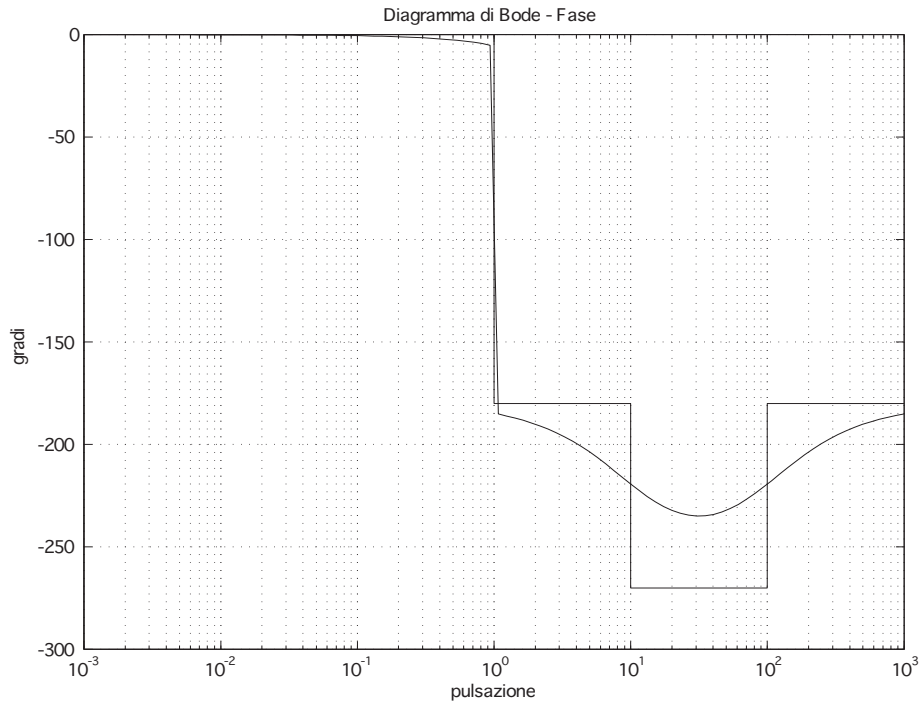
$$e_{rp} = \frac{1}{1 + 10K_p} \leq 10^{-3},$$

ovvero

$$K_p \geq 10^2 - 0.1 \approx 100.$$

Scegliamo, preliminarmente, $K_p = 10^2$ e tracciamo il diagramma di Bode di $K_p G(s)$, ottenendo il diagramma di Bode illustrato qui di seguito.





La pulsazione di attraversamento in questo caso è $\omega_A = 20$ rad/s mentre il margine di fase alla pulsazione desiderata ω_A^* è circa -45° . Se inseriamo uno zero in -10 , ovvero poniamo $\frac{K_d}{K_p} = 0.1$, e alziamo il diagramma delle ampiezze di 20 dB (il che corrisponde a moltiplicare per un ulteriore fattore 10 il guadagno K_p del controllore) otteniamo il risultato desiderato sia dal punto di vista della pulsazione di attraversamento che dal punto di vista del margine di fase. Pertanto il controllore PD desiderato è

$$C(s) = 10 \cdot 100 \left(1 + \frac{s}{10} \right) = 1000 + 100s.$$

Esercizio 2. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^3 + (2a + 1)s^2 + (2a + a^2)s + a^2 = 0.$$

Il sistema risulta asintoticamente stabile se e solo se la precedente equazione caratteristica presenta tutte le radici nel semipiano $\text{Re}(s) < 0$. Per verificare, al variare di a , se la precedente equazione ha tutte le radici a parte reale negativa oppure no è sufficiente costruire la corrispondente tabella di Routh. Si ottiene, allora,

3	1	$2a + a^2$
2	$2a + 1$	a^2
1	$\frac{2a(a+1)^2}{2a+1}$	0
0	a^2	0

Il polinomio $s^3 + (2a + 1)s^2 + (2a + a^2)s + a^2$ ha radici tutte a parte reale negativa se e solo se la prima colonna della tabella di Routh ha tutti i coefficienti non nulli e di ugual segno (positivo). Ciò si verifica se e solo se $a > 0$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, chiaramente il sistema risulta BIBO stabile per i medesimi valori di a per cui esso è asintoticamente stabile. La situazione in cui il sistema risulti BIBO stabile senza essere asintoticamente stabile può verificarsi se e solo se per qualche valore di a la funzione di trasferimento del sistema ha tutti i poli a parte reale negativa, nonostante il polinomio $s^3 + (2a + 1)s^2 + (2a + a^2)s + a^2$ non sia di Hurwitz. La funzione di trasferimento del sistema è

$$G(s) = \frac{s^2}{s^3 + (2a + 1)s^2 + (2a + a^2)s + a^2}$$

e la situazione precedentemente delineata, alla luce del fatto che il polinomio al numeratore ha uno zero di molteplicità 2 in 0, si può verificare solo se $s^3 + (2a + 1)s^2 + (2a + a^2)s + a^2$ ha uno o due zeri in 0 e tutti gli altri a parte reale negativa. È immediato rendersi conto che ciò si verifica se e solo se $a = 0$. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se

$$a \geq 0.$$

ii) [5 punti] Per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist andiamo a valutare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento in catena aperta

$$KG(s) = K \frac{s^2}{(s + 1)^3}$$

per valori di K positivi e negativi. Da

$$K \cdot G(j\omega) = \frac{-\omega^2}{(1 + j\omega)^3} = \frac{-\omega^2(1 - j\omega)^3}{(1 + \omega^2)^3} = K \frac{\omega^2(3\omega^2 - 1) + j\omega^3(3 - \omega^2)}{(1 + \omega^2)^3},$$

segue

$$\operatorname{Re}\{K \cdot G(j\omega)\} = K \frac{\omega^2(3\omega^2 - 1)}{(1 + \omega^2)^3} \quad \operatorname{Im}\{K \cdot G(j\omega)\} = K \frac{\omega^3(3 - \omega^2)}{(1 + \omega^2)^3}.$$

Pertanto, posto $\bar{\omega}_1 := \sqrt{1/3}$ e $\bar{\omega}_2 := \sqrt{3}$, si ha per $K > 0$ e $\omega \geq 0$:

$$\operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1, \end{cases}$$

e

$$\operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2. \end{cases}$$

Invece, per $K < 0$, si ha

$$\operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar{\omega}_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_1; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_1, \end{cases}$$

e

$$\operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}_2; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}_2. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_1$

$$\operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{K\sqrt{3}}{8} = \begin{cases} > 0 & \text{se } K > 0; \\ < 0 & \text{se } K < 0. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_2$

$$\operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} = \frac{3K}{8} = \begin{cases} > 0 & \text{se } K > 0; \\ < 0 & \text{se } K < 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} = 0.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \rightarrow 0^+$ e $\omega \rightarrow +\infty$, di $\operatorname{Re}\{KG(j\omega)\}$ e $\operatorname{Im}\{KG(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

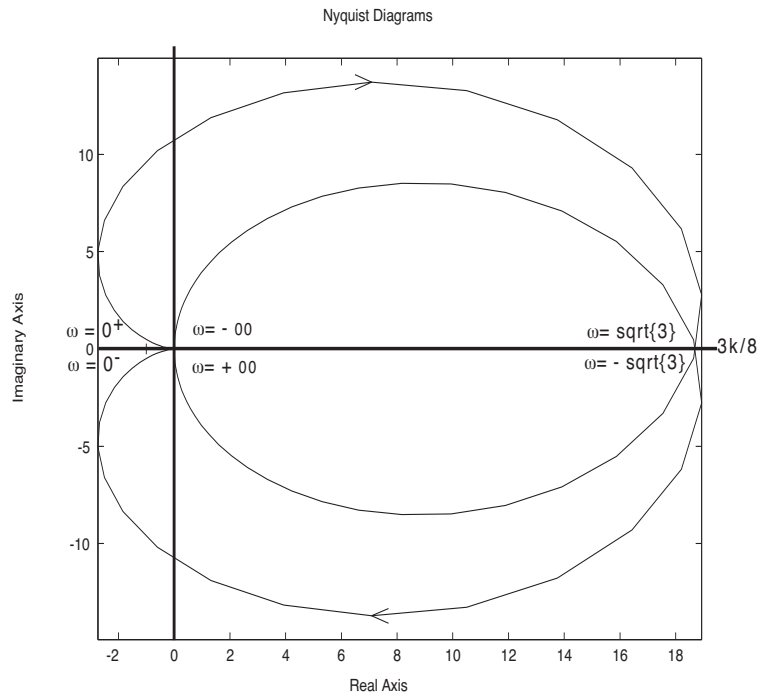
Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\begin{aligned} \arg KG(j\omega) &= \arg \left(K \frac{-\omega^2}{(1+j\omega)^3} \right) \\ &= \arg K - 180^\circ - 3\arg(1+j\omega). \end{aligned}$$

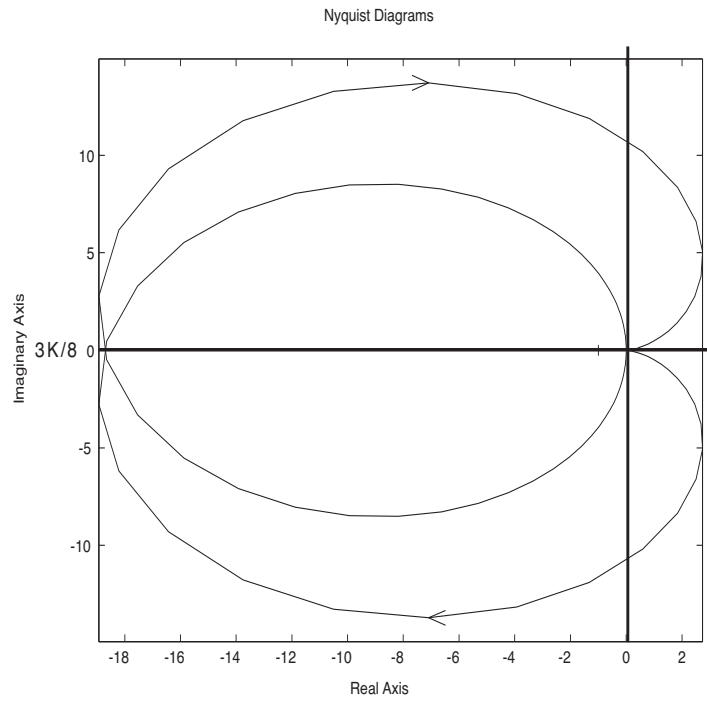
Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} 180^\circ & \text{se } K > 0; \\ 0^\circ & \text{se } K < 0; \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} -90^\circ & \text{se } K > 0; \\ 90^\circ & \text{se } K < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che il comportamento per $\omega < 0$ si trova per simmetria, rovesciando la porzione di diagramma relativa a pulsazione non negative, il diagramma di Nyquist di $KG(j\omega)$ risulta, pertanto, illustrato per $K > 0$ in Figura 1



e per $K < 0$ in Figura 2.



Osserviamo, preliminarmente, che $n_{G+} = 0$. Per $K > 0$ il numero di giri compiuti attorno al punto critico è sempre 0 e, di conseguenza, $n_{W+} = 0$, garantendo in tal modo

la stabilità BIBO del sistema retroazionato. Per $K < 0$ invece dobbiamo distinguere tre casi:

- $0 > K > -8/3$: in questo caso il punto di attraversamento del semiasse reale negativo da parte del diagramma di Nyquist si trova alla destra del punto $-1 + j0$. Pertanto $N = 0$ e, di conseguenza, $n_{W+} = 0$, garantendo in tal modo la stabilità BIBO del sistema retroazionato.
- $K < -8/3$: in questo caso il punto di attraversamento del semiasse reale negativo da parte del diagramma di Nyquist si trova alla sinistra del punto $-1 + j0$ e vale $N = -2$. Di conseguenza, $n_{W+} = 2$, rivelando in tal modo che il sistema retroazionato non è BIBO stabile.
- $K = -8/3$: in questo caso il punto di attraversamento del semiasse reale negativo da parte del diagramma di Nyquist si trova proprio in corrispondenza al punto $-1 + j0$. Ciò preclude automaticamente la stabilità BIBO del sistema retroazionato, che presenterà infatti due poli immaginari coniugati. Ricorrendo ad un percorso di Nyquist modificato si trova tuttavia $N = 0$ e, di conseguenza, $n_{W+} = 0$, ovvero il sistema retroazionato non ha poli a parte reale strettamente positiva.

Esercizio 3. [4 punti] Da

$$W(j\omega) = \frac{j\omega(1+j\omega)}{1-\omega^2} = \frac{-\omega^2 + j\omega}{1-\omega^2}$$

segue

$$\operatorname{Re}\{W(j\omega)\} = \frac{-\omega^2}{1-\omega^2} \quad \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} = \frac{\omega}{1-\omega^2}.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \rightarrow 0^+$, $\omega \rightarrow 1^\pm$ e $\omega \rightarrow +\infty$, di $\operatorname{Re}\{W(j\omega)\}$ e $\operatorname{Im}\{W(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^-} \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} &= -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^-} \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} &= +\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^+} \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} &= +\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^+} \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} &= -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}\{W(j\omega)\} &= 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}\{W(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

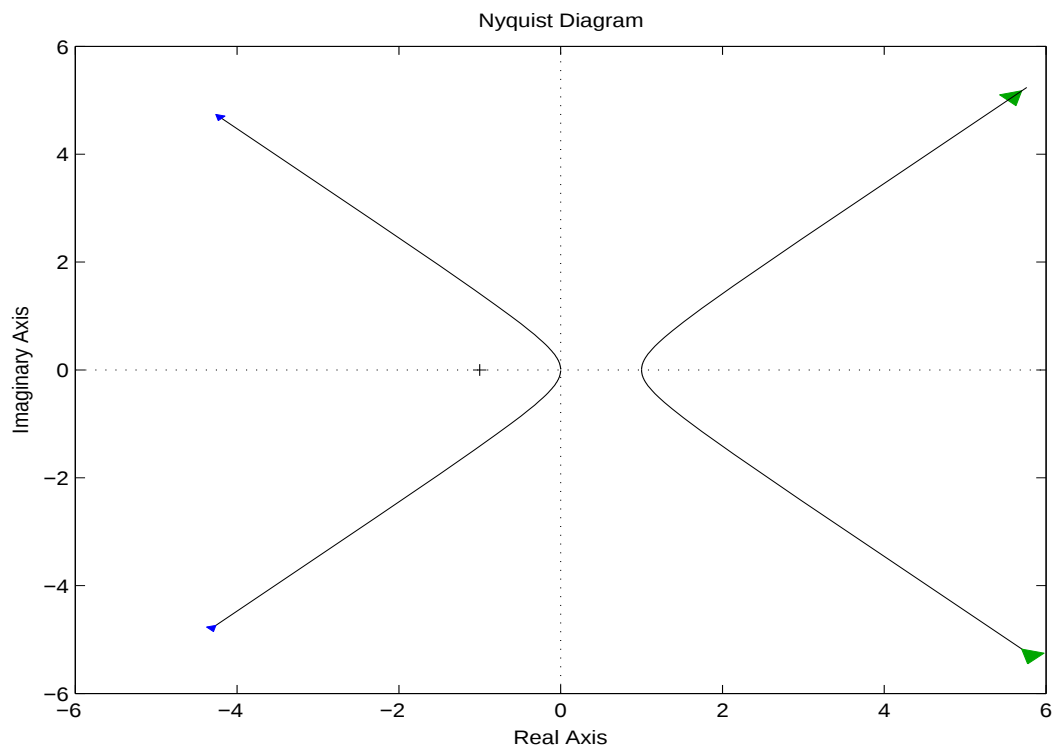
Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\arg W(j\omega) = \arg \left(\frac{-\omega^2 + j\omega}{1-\omega^2} \right) = \begin{cases} \arctan^{-1} \left(-\frac{1}{\omega} \right) + 180^\circ & \text{se } 0 < \omega < 1 \\ \arctan^{-1} \left(-\frac{1}{\omega} \right) & \text{se } 1 < \omega \end{cases}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg\{W(j\omega)\} &= 90^\circ \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^-} \arg\{W(j\omega)\} &= 135^\circ \\ \lim_{\omega \rightarrow 1^+} \arg\{W(j\omega)\} &= -45^\circ \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= 0.\end{aligned}$$

Il diagramma di Nyquist risultante è illustrato in Figura 3 (per $\omega = \pm 1$ il diagramma passa per il punto improprio).



Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 160 e successive.