COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
14 Aprile 2005

Esercizio 1. Si consideri il modello di stato a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= F\mathbf{x}(k) + Gu(k) &&= \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ -1 & 1-2a \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) &= H\mathbf{x}(k) &&= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k), \qquad\qquad k \in \mathbf{Z}_+, \end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la forma di Jordan della matrice F e si studino stabilità semplice, asintotica e BIBO del sistema;

ii) per $a = 1/2$ si determini l'evoluzione forzata di uscita del sistema in corrispondenza alla successione di ingresso

$$\mathbf{u}(k) = \delta(k-1) - \frac{5}{4}(-1)^k \delta_{-1}(k-2);$$

iii) si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$ raggiungibilità ed osservabilità del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

i) Si determini, se possibile, un ingresso $u(t)$, nullo per $t \geq 2$, in modo tale che partendo da $x(0) = 0$ sia possibile avere

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2^{t-2} \end{bmatrix}$$

per ogni $t \geq 2$.

ii) Si determini al variare di a in $\mathbb{R}$, ove possibile, un ingresso di controllo che mandi a zero lo stato iniziale $x(0) = [\,a \quad 1 \quad -a\,]^T$ nel minimo numero di passi.

Esercizio 3. Dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t) \end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato il cui errore di stima evolva come combinazione lineare dei modi

$$e^{-t}, te^{-t}, e^{-2t}.$$

ii) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato il cui errore di stima evolva come combinazione lineare dei modi

$$e^{-t}, e^{-2t}, te^{-2t}.$$

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui l'ingresso di controllo/lo stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si enunci e dimostri il Lemma di Heymann.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] Distinguiamo a seconda che i due autovalori della matrice F, $\lambda_1 = a^2$ e $\lambda_2 = 1 - 2a$, siano distinti o coincidenti. Se $\lambda_1 = \lambda_2$, ovvero $a^2 = 1 - 2a$, ovvero $a = -1 \pm \sqrt{2}$, allora è immediato rendersi conto del fatto che la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2$ è pari ad 1 e pertanto la forma di Jordan della matrice F presenta un solo miniblocco di dimensione 2 relativamente all'autovalore in esame

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Se, invece, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ovvero $a \neq -1 \pm \sqrt{2}$, allora la matrice F è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 - 2a \end{bmatrix}.$$

Per quanto concerne lo studio della stabilità, è immediato rendersi conto del fatto che abbiamo stabilità asintotica se e solo se

$$|a^2| < 1 \qquad |1 - 2a| < 1,$$

ovvero

$$-1 < a < 1 \qquad 0 < a < 1,$$

e pertanto per $0 < a < 1$. Per $a = 0$ abbiamo un autovalore nullo e un autovalore semplice in 1 e quindi stabilità semplice. Per $a = 1$ abbiamo un autovalore semplice in 1 ed uno in -1 e quindi anche in questo caso si ha stabilità semplice.

Valutiamo ora la stabilità BIBO del sistema. Certamente per i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica si ha pure stabilità BIBO. Vediamo ora se esistono dei valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI_2 - F)^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - a^2 & 0 \\ 1 & z - (1 - 2a) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(z - a^2)(z - 1 + 2a)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - 1 + 2a & 0 \\ -1 & z - a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{a^2 + 2a}{(z - a^2)(z - 1 + 2a)}. \end{aligned}$$

È importante evidenziare come per $a = 0, -2$ la funzione di trasferimento del sistema si annulli. In tale situazione il sistema diventa banalmente BIBO stabile. Per $a \neq 0, -2$, invece, non possono subentrare cancellazioni tra numeratore e denominatore, e quindi non si può avere stabilità BIBO senza stabilità asintotica. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in \{-2\} \cup [0, 1)$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 1/2$ la matrice del sistema diventa

$$F = J = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La successione di ingresso ha trasformata zeta

$$U(z) = z^{-1} - \frac{5}{4} z^{-2} \cdot \frac{z}{z + 1} = \frac{1}{z} - \frac{5}{4} \frac{1}{z(z + 1)} = \frac{z - 1/4}{z(z + 1)}.$$

La funzione di trasferimento del sistema in questo caso vale

$$W(z) = H(zI_2 - F)^{-1}G = \frac{5/4}{z(z - 1/4)}.$$

Si trova, allora,

$$Y(z) = W(z)U(z) = \frac{5/4}{z(z - 1/4)} \cdot \frac{z - 1/4}{z(z + 1)} = \frac{5/4}{z^2(z + 1)} = \frac{5}{4} z^{-3} \cdot \frac{z}{z + 1}$$

a cui corrisponde la successione di uscita

$$y(k) = \frac{5}{4}(-1)^{k-3}\delta_{-1}(k-3).$$

iii) [2.5 punti] La matrice di raggiungibilità è

$$\mathcal{R} = [\, g \quad Fg \,] = \begin{bmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & -2a \end{bmatrix}$$

e il suo determinante vale

$$\det \mathcal{R} = -2a - a^2 = -a(2+a).$$

Pertanto il sistema è raggiungibile se e solo se $a \neq 0, -2$. Similmente, la matrice di osservabilità vale

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a^2+1 & 2a-1 \end{bmatrix}$$

ed ha determinante

$$\det \mathcal{O} = 2a - 1 + a^2 + 1 = a(2+a).$$

Pertanto il sistema è osservabile se e solo se è raggiungibile ovvero per $a \neq 0, -2$.

Esercizio 2. i) [3 punti] Affinchè il problema sia risolubile occorre e basta determinare un ingresso $u(t)$, nullo per $t \geq 2$, che porti lo stato del sistema al tempo $t = 2$ al valore $\mathbf{x}(2) = [0\ 0\ 1]^T$. Poichè dall'istante $t = 2$ in poi il sistema evolve di evoluzione libera e il vettore $[0\ 0\ 1]^T$ è un autovettore di F relativo all'autovalore 2, ne consegue che l'evoluzione di stato da $t = 2$ in poi sarà esattamente quella desiderata. Il problema diventa allora quello di determinare $u(0)$ e $u(1)$ in modo da portare lo stato del sistema da $\mathbf{x}(0) = 0$ a $\mathbf{x}(2) = [0\ 0\ 1]^T$. La matrice di raggiungibilità in due passi è

$$\mathcal{R}_2 = [\, g \quad Fg \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e pertanto $[0\ 0\ 1]^T \notin \mathrm{Im}\mathcal{R}_2$. Di conseguenza, il problema non ha soluzione.

ii) [4 punti] Si tratta di valutare per quali $k \in \mathbb{N}$ l'equazione

$$0 = \mathbf{x}(k) = F^k \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{bmatrix} + \mathcal{R}_k \begin{bmatrix} u(k-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

nelle indeterminate $u(0), \ldots, u(k-1)$ ha soluzione o, equivalentemente,

$$F^k \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}\mathcal{R}_k.$$

Per $k = 1$ si trova

$$F \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}$$

che appartiene a $\mathrm{Im} g = \mathrm{Im}\mathcal{R}_1$ se e solo se $a = 0$. In questo caso vale $u(0) = 0$.

Se $a \neq 0$ e $k = 2$ si trova

$$F^2 \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}$$

che non appartiene mai a $\mathrm{Im}\,[\,g \quad Fg\,] = \mathrm{Im}\mathcal{R}_2 = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Infine, per $a \neq 0$ e $k = 3$ si trova

$$F^3 \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}$$

che appartiene sempre a $\mathrm{Im}\,[\,g \quad Fg \quad F^2 g\,] = \mathrm{Im}\mathcal{R}_3 = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. La soluzione è univocamente determinata come

$$u(2) = 0, \qquad u(1) = -2a, \qquad u(0) = a.$$

Esercizio 3. i) [4 punti] È immediato verificare che il sistema è in forma standard di osservazione e l'unico autovalore del sottosistema non osservabile è -1; pertanto riusciamo ad allocare due autovalori in -1 e un autovalore in -2. Il problema è quello di verificare se siamo in grado di fare in modo che la matrice $F + LH$ presenti due modi distinti relativi all'autovalore -1. Posto $L = [\ell_1\ \ell_2\ \ell_3]^T$, la matrice $F + LH$ diventa

$$F + LH = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} [\,1 \quad 1 \quad 0\,] = \begin{bmatrix} -1+\ell_1 & \ell_1 & 0 \\ -1+\ell_2 & -1+\ell_2 & 0 \\ 1+\ell_3 & \ell_3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\Delta_{F+LH}(s) = (s+1)(s^2 - (\ell_1 + \ell_2 - 2)s + 1 - \ell_2)$, e quindi affinchè esso coincida con $(s+1)^2(s+2)$ occorre e basta che $\ell_1 = 0$ e $\ell_2 = -1$. ℓ_3 rimane completamente libero. A questo punto si tratta di andare a vedere per quali valori di ℓ_3 (se ce ne sono) la forma di Jordan di $F + LH$ presenta un miniblocco di Jordan di dimensione 2 relativo all'autovalore -1. Ciò è equivalente ad andare a verificare per quali valori di ℓ_3 l'autospazio di $F + LH$ relativo all'autovalore -1 ha dimensione 1. Si vede immediatamente che

$$[(F + LH) - (-1)I_3] = (F + LH + I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1+\ell_3 & \ell_3 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 2, e quindi nucleo di dimensione 1, se e solo se $0 \neq \det \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1+\ell_3 & \ell_3 \end{bmatrix}$. Pertanto, per ogni valore di $\ell_3 \neq 1$ lo stimatore asintotico (con $\ell_1 = 0$ e $\ell_2 = -1$) presenta i modi richiesti.

ii) [4 punti] Procedendo come al punto precedente, si tratta prima di scegliere ℓ_1 e ℓ_2 in modo tale che $\Delta_{F+LH}(s) = (s+1)(s^2 - (\ell_1 + \ell_2 - 2)s + 1 - \ell_2)$ coincida con $(s+1)(s+2)^2$. Ciò porta alla soluzione $\ell_1 = 1$ e $\ell_2 = -3$. A questo punto si tratta di andare a vedere per quali valori di ℓ_3 (se ce ne sono) la forma di Jordan di $F + LH$ presenta un miniblocco di Jordan di dimensione 2 relativo all'autovalore -2. Ciò, ancora una volta, è equivalente ad andare a verificare per quali valori di ℓ_3 l'autospazio di $F + LH$ relativo all'autovalore -2 ha dimensione 1. Si vede immediatamente che

$$[(F + LH) - (-2)I_3] = (F + LH + I_3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 1+\ell_3 & \ell_3 & 1 \end{bmatrix}$$

ha sempre rango 2, e quindi il nucleo ha sempre dimensione 1. Pertanto, per ogni valore di ℓ_3 lo stimatore asintotico (con $\ell_1 = 1$ e $\ell_2 = -3$) presenta i modi richiesti.

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Controllo in retroazione.