COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI DEL 31 AGOSTO 2005
Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica ed Energetica

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + (1+a)y(t) = \frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si studi la stabilità asintotica e BIBO del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) per $a = -1$ si determini l'evoluzione libera del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 2, \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 0.$$

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{(s^2+1)(s+0.1)}{s^2(s+10)^2}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

ii) Si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$ ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$.

iii) Si determini il tipo del sistema $W(s)$ e l'errore di regime permanente in corrispondenza al segnale canonico che ne definisce il tipo.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+10}{(s-1)(s+1)}.$$

i) Si tracci il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza $G(j\omega)$, al variare di ω in $\mathbb{R}$, e

ii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa a partire da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 4. Si tracci almeno approssimativamente il luogo (positivo) delle radici della funzione $W(s)$, ottenuta per retroazione unitaria negativa a partire da

$$G(s) = K\frac{(s+5)}{(s+10)(s+1)s^2}, \qquad K \in \mathbb{R}, K \geq 0.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3.5 punti] L'equazione caratteristica è

$$0 = s^3 + 2s^2 + 5s + 1 + a.$$

Possiamo valutare per quali valori di a essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s) = s^3 + 2s^2 + 5s + 1 + a$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 5 \\
2 & 2 & 1+a \\
1 & \dfrac{9-a}{2} & 0 \\
0 & 1+a & 0
\end{array}$$

Poichè i primi due elementi in prima colonna sono positivi, l'unica situazione corrispondente alla stabilità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} \dfrac{9-a}{2} > 0 \\ a + 1 > 0 \end{cases}$$

ovvero se e solo se $-1 < a < 9$. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$-1 < a < 9.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro a per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro a in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s}{s^3 + 2s^2 + 5s + 1 + a}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 0, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro a il polinomio al denominatore ha uno zero in 0 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 0 se e solo se $a = -1$. Per tale valore di a la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

e quindi, per la regola dei segni di Cartesio, essa ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se a soddisfa $-1 \leq a < 9$.

ii) [4 punti] Per $a = -1$ l'equazione caratteristica diventa

$$0 = s(s^2 + 2s + 5) = 2[(s+1)^2 + 2^2]$$

ed ha uno zero in 0 e due zeri complessi coniugati di molteplicità unitaria collocati in $-1 \pm j2$. I modi corrispondenti a questi zeri sono: $1, e^{-t}\cos(2t), e^{-t}\sin(2t)$. Pertanto l'evoluzione libera assume la seguente espressione:

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-t}\cos(2t) + c_3 e^{-t}\sin(2t).$$

Il calcolo delle derivate prima e seconda porta a

$$\begin{aligned} \frac{dy_\ell}{dt} &= (2c_3 - c_2)e^{-t}\cos(2t) - (2c_2 + c_3)e^{-t}\sin(2t) \\ \frac{d^2 y_\ell}{dt^2} &= (-4c_3 - 3c_2)e^{-t}\cos(2t) + (4c_2 - 3c_3)e^{-t}\sin(2t) \end{aligned}$$

Valutando la funzione e la sua derivata in corrispondenza a 0 si trova:

$$\begin{aligned} 0 = y(0^-) = y_\ell(0) &= c_1 + c_2 \\ 2 = \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell}{dt} &= 2c_3 - c_2 \\ 0 = \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = \frac{d^2 y_\ell}{dt^2} &= -4c_3 - 3c_2. \end{aligned}$$

Da ciò segue

$$c_1 = -c_2 = 4/5, c_3 = 3/5.$$

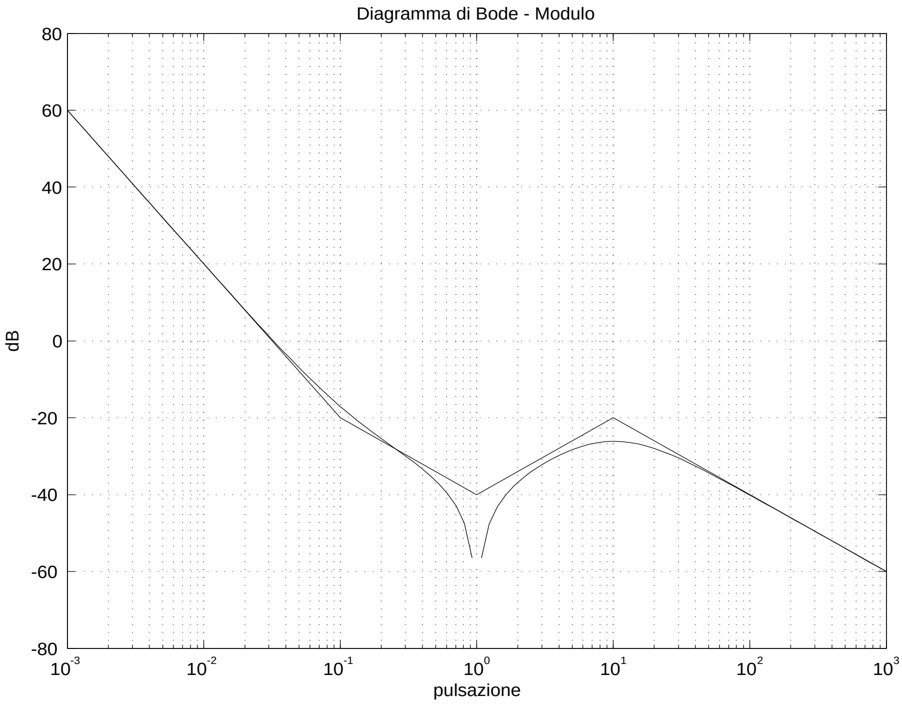
Pertanto l'evoluzione libera risulta

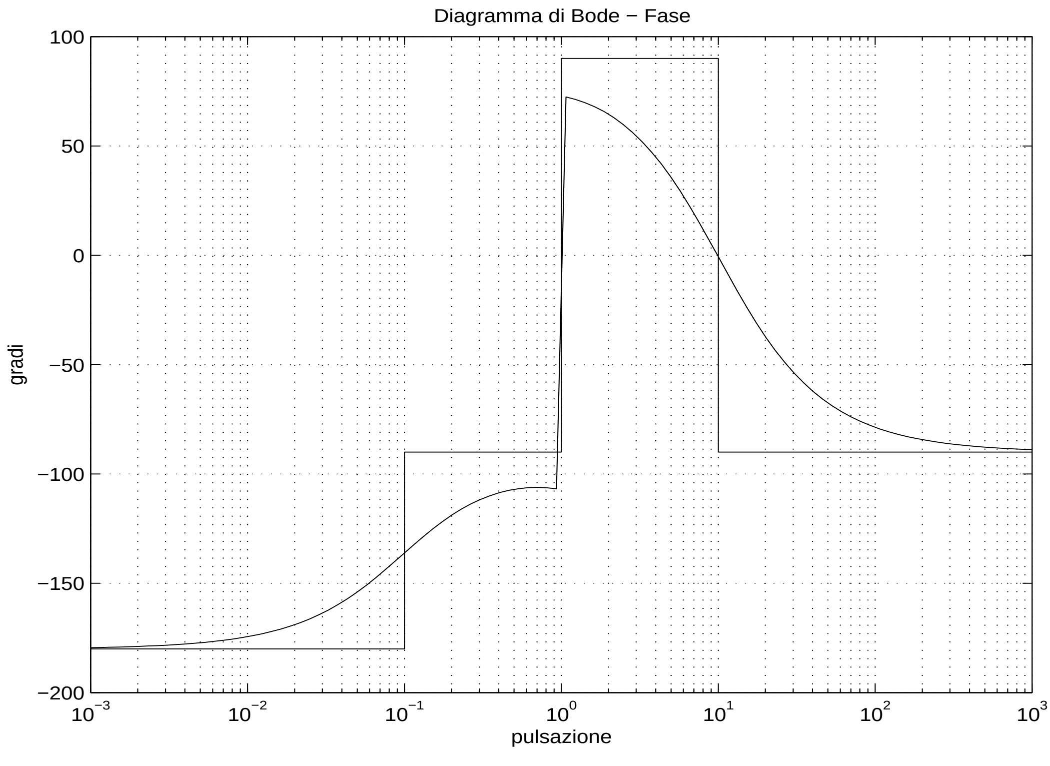
$$y_\ell(t) = 0.8 - 0.8e^{-t}\cos(2t) + 0.6e^{-t}\sin(2t).$$

Esercizio 2. i) [6 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$G(s) = 10^{-3}\,\frac{(1+s^2)(1+10s)}{s^2(1+0.1s)^2}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento ha guadagno di Bode 10^{-3} (ovvero $|K_B|_{\text{dB}} = -60$ dB e $\arg(K_B) = 0^o$). I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi presentano inoltre tre punti di spezzamento: uno corrispondente ad un polo reale negativo doppio in -10, uno corrispondente ad uno zero reale negativo semplice in -0.1 ed uno corrispondente ad una coppia di zeri semplici immaginari coniugati collocati in $\pm j$ e quindi di pulsazione naturale $\omega_n = 1$. Oltre a questi termini, inoltre, bisogna tener conto del polo doppio nell'origine, che fa partire il diagramma delle ampiezze con pendenza -40 dB/decade e dà un contributo di -180^o al diagramma delle fasi (che parte, pertanto, dal valore -180^o). Il risultato è illustrato in figura (NB: nel diagramma delle ampiezze il picco negativo in 10^0 rad/sec è infinito: la sua rappresentazione finita è legata a problemi numerici di Matlab!).





ii) [3 punti] Il calcolo della funzione di trasferimento porta a

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{(s^2+1)(s+0.1)}{s^4+21s^3+100.1s^2+s+0.1}.$$

Poichè la rappresentazione così ottenuta per la funzione di trasferimento del sistema in retroazione è coprima, tale sistema risulterà BIBO stabile se e solo se il polinomio al denominatore

$$d(s) = s^4 + 21s^3 + 100.1s^2 + s + 0.1$$

è di Hurwitz.

Applicando la tabella di Routh si trova facilmente che tutti i coefficienti in prima colonna sono positivi e quindi c'è stabilità BIBO.

iii) [3 punti] Chiaramente il sistema è di tipo 2 dal momento che la fdt in catena aperta presenta un polo doppio nell'origine. Ciò significa che il sistema insegue esattamente gradino unitario e rampa lineare unitaria, mentre insegue con errore di regime permanente costante e non nullo la rampa parabolica unitaria. L'errore di regime permanente alla rampa parabolica è pari a

$$e_{rp} = \frac{1}{K_B} = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3,$$

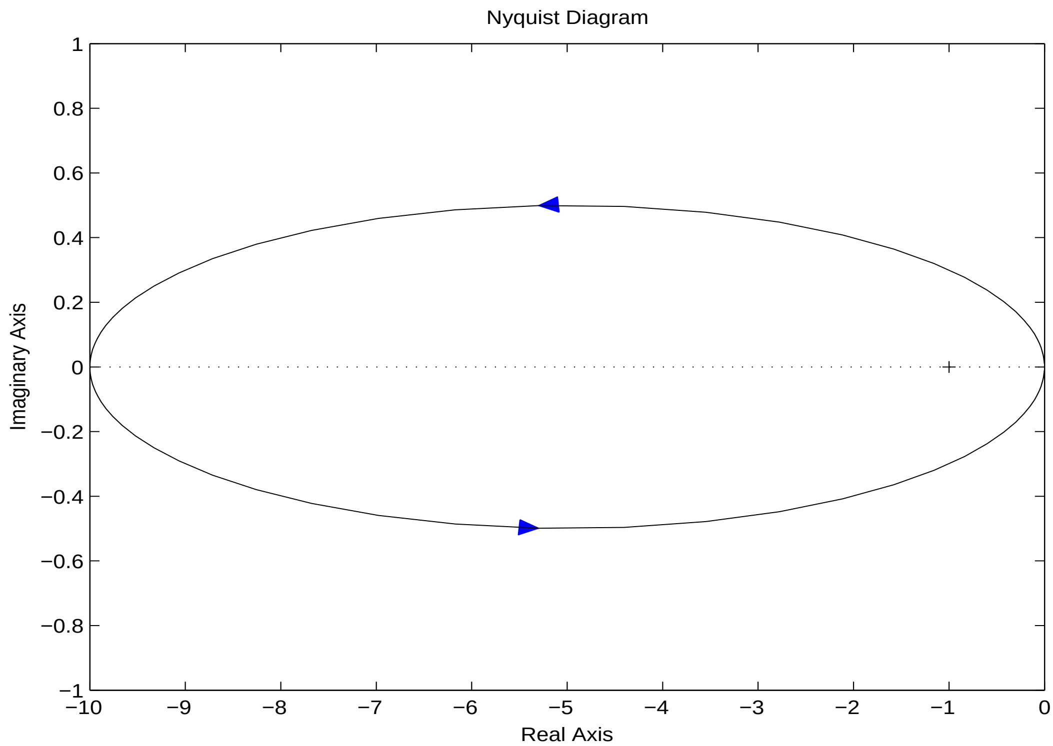
dove K_B rappresenta il guadagno di Bode della fdt $G(s)$ in catena aperta.

Esercizio 3. i) [3 punti] Calcolando la $G(s)$ sull'asse immaginario si trova

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{j\omega + 10}{(j\omega - 1)(j\omega + 1)} = \frac{-10 - j\omega}{\omega^2 + 1} \\ &= \frac{-10}{\omega^2 + 1} - j\frac{\omega}{\omega^2 + 1}. \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che, per $\omega > 0$, la parte immaginaria e la parte reale sono sempre negative.

Per $\omega = 0$ il diagramma parte dal punto $-10 + j0$, e quindi con fase -180^o. Per $\omega \to +\infty$ sia parte reale che parte immaginaria vanno a zero e quindi il diagramma arriva nell'origine con fase che si trova facilmente essere -90^o. Di conseguenza, il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ (la parte per pulsazioni negative si trova tracciando il simmetrico rispetto all'asse reale della porzione di diagramma relativa a pulsazioni positive) è il seguente:



ii) [2.5 punti] È immediato rendersi conto del fatto che il diagramma di Nyquist compie un giro in verso antiorario attorno al punto $-1 + j0$. Poichè n_{G+}, il numero di poli a parte reale positiva di $G(s)$, è 1, ne consegue che

$$1 = N = n_{G+} - n_{W+} = 1 - n_{W+},$$

ovvero il numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$, n_{W+}, è 0. Ciò assicura, in particolare, che $W(s)$ sia BIBO stabile.

Esercizio 4. [5 punti] Adottando le regole per il tracciamento del luogo (positivo) delle radici,

1. verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $(-\infty, -10]$ e $[-5, -1]$.

2. Poichè il numero dei poli è $n = 4$ mentre il numero di zeri è $m = 1$, ne consegue che tre rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $\pi/3, \pi$, e $5\pi/3$.

3. Il baricentro da cui partono gli asintoti è

$$\sigma_c = \frac{-10 - 1 + 5}{4 - 1} = -2.$$

Senza fare ulteriori conti possiamo dedurre ora l'andamento qualitativo del sistema ottenendo in tal modo