COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI DEL 22 GIUGNO 2005
Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica ed Energetica

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si studi la stabilità (asintotica/semplice) del sistema;

ii) si determini l'evoluzione libera del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

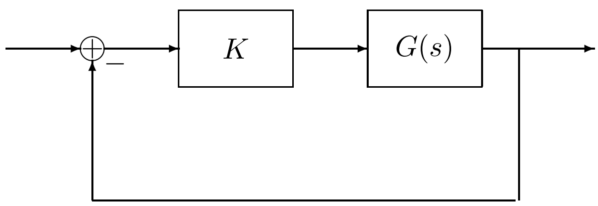
$$y(0^-) = 1, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 1.$$

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{(s+1)(s-10)}{s(s+0.1)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

ii) Si supponga di applicare al precedente sistema un controllo in retroazione (unitaria negativa) sulla cui catena di azione diretta agisca un controllore proporzionale K come illustrato in figura:



Si studi la stabilità BIBO del sistema retroazionato al variare di K in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{-5}{(s+1)(s+4)}.$$

i) Si tracci il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza $G(j\omega)$, al variare di ω in $\mathbb{R}$, e

ii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa a partire da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 4. Si tracci almeno approssimativamente il luogo (positivo) delle radici della funzione $W(s)$, ottenuta per retroazione unitaria negativa a partire da

$$G(s) = K\frac{s}{(s+5)(s+3)(s+2-j)(s+2+j)}, \qquad K \in \mathbb{R}, K \geq 0.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2.5 punti] Equazione caratteristica è

$$0 = s(s^2 + 2s + 2).$$

È evidente che avendo una radice in 0 la stabilità possa essere al più semplice. D'altra parte, sfruttando la regola dei segni di Cartesio, mi accorgo che il polinomio s^2+2s+2 è di Hurwitz, avendo tutti i coefficienti (non nulli e) di ugual segno. Pertanto il sistema è semplicemente stabile ma non asintoticamente stabile.

ii) [5 punti] Gli zeri dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 0$ di molteplicità unitaria e $\lambda_2 = -1 + j$, $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = -1 - j$, entrambi di molteplicità unitaria. I modi (espressi in forma reale) corrispondenti a questa terna di zeri sono: $e^{0t} = 1, e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t$. Pertanto l'evoluzione libera assume la seguente espressione:

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-t}\cos t + c_3 e^{-t}\sin t.$$

Il calcolo delle derivate prima e seconda porta a

$$\begin{aligned}
\frac{dy_\ell}{dt} &= -c_2 e^{-t}\cos t - c_2 e^{-t}\sin t - c_3 e^{-t}\sin t + c_3 e^{-t}\cos t \\
&= (c_3 - c_2)e^{-t}\cos t - (c_2 + c_3)e^{-t}\sin t \\
\frac{d^2 y_\ell}{dt^2} &= -(c_3 - c_2)e^{-t}\cos t - (c_3 - c_2)e^{-t}\sin t + (c_2 + c_3)e^{-t}\sin t - (c_2 + c_3)e^{-t}\cos t \\
&= -2c_3 e^{-t}\cos t + 2c_2 e^{-t}\sin t.
\end{aligned}$$

Valutando la funzione e le sue derivate in corrispondenza alle condizioni iniziali si trova:

$$\begin{aligned}
1 = y(0^-) = y_\ell(0) &= c_1 + c_2 \\
0 = \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell}{dt} &= c_3 - c_2 \\
1 = \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = \frac{d^2 y_\ell}{dt^2} &= -2c_3.
\end{aligned}$$

Da ciò segue

$$c_3 = -1/2, \qquad c_2 = -1/2, \qquad c_1 = 3/2.$$

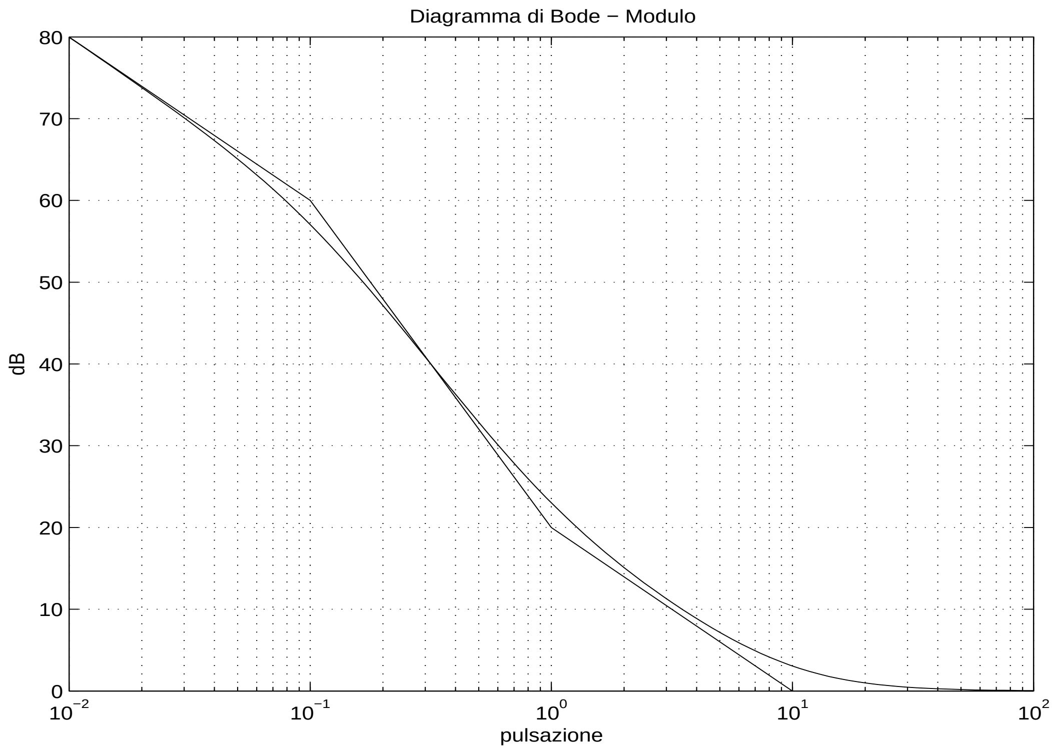
Pertanto l'evoluzione libera risulta

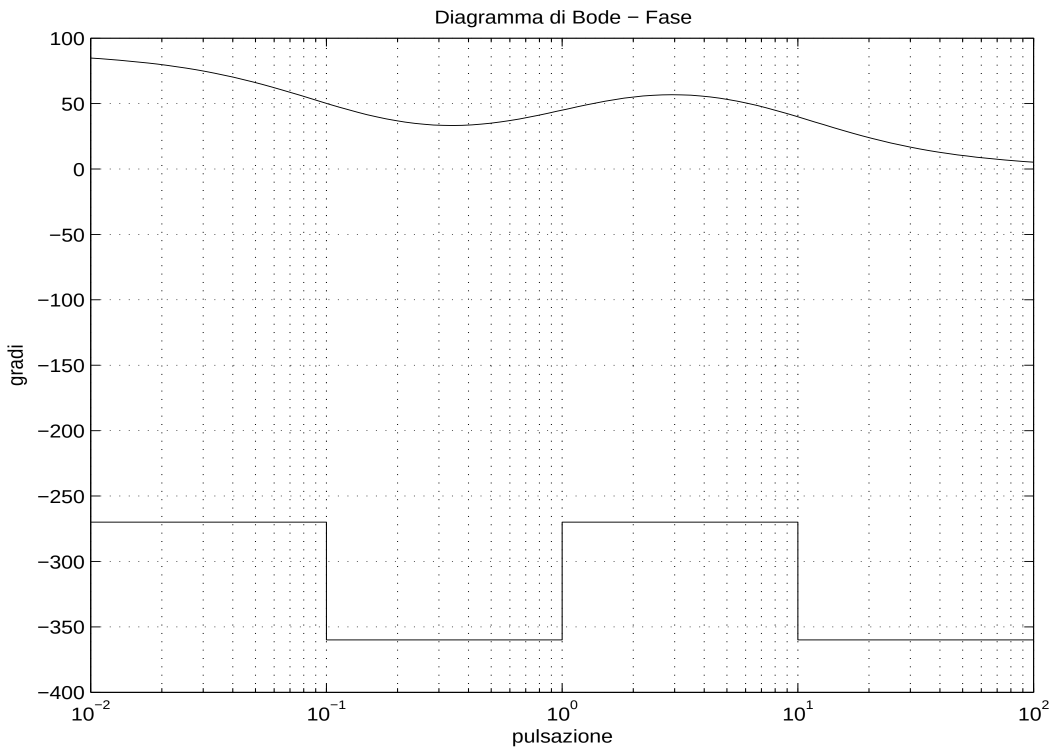
$$y_\ell(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t.$$

Esercizio 2. i) [6 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$G(s) = -100\ \frac{(1+s)(1-0.1s)}{s\,(1+10s)}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento ha guadagno di Bode -100 (ovvero $|K_B|_{\rm dB} = 40$ dB e $\arg(K_B) = 180^o$). I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi presentano inoltre tre punti di spezzamento: uno corrispondente ad uno zero reale negativo in -10^0, uno corrispondente ad uno zero reale positivo in 10 ed uno corrispondente ad un polo reale negativo in -10^{-1}. Oltre a questi termini, inoltre, bisogna tener conto del polo semplice nell'origine, che fa partire il diagramma delle ampiezze con pendenza -20 dB/decade e dà un contributo di -90^o al diagramma delle fasi (che parte, pertanto, dal valore 90^o). Il risultato è illustrato in figura.





ii) [3.5 punti] La funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa è

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K\frac{(s+1)(s-10)}{s(s+0.1)}}{1+K\frac{(s+1)(s-10)}{s(s+0.1)}} = \frac{K(s+1)(s-10)}{s(s+0.1)+K(s+1)(s-10)}.$$

Poichè la rappresentazione così ottenuta per la funzione di trasferimento del sistema in retroazione è coprima, tale sistema risulterà BIBO stabile se e solo se il polinomio al denominatore

$$d(s) = s(s+0.1) + K(s+1)(s-10) = (K+1)s^2 + (0.1-9K)s - 10K$$

è di Hurwitz.

Osserviamo, preliminarmente, che per $K=-1$ il polinomio diventa di primo grado:

$$d(s) = 9.1s + 10$$

ed è chiaramente di Hurwitz. Tuttavia in tal caso la fdt $W(s)$ risulterebbe non propria, pertanto questo non è un caso di interesse. Per $K \neq -1$ possiamo applicare Cartesio e verificare sotto quali condizioni i coefficienti hanno tutti ugual segno. Ciò si verifica se e solo se

$$K+1>0, \qquad 0.1-9K>0, \qquad -10K>0$$

oppure

$$K+1<0, \qquad 0.1-9K<0, \qquad -10K<0.$$

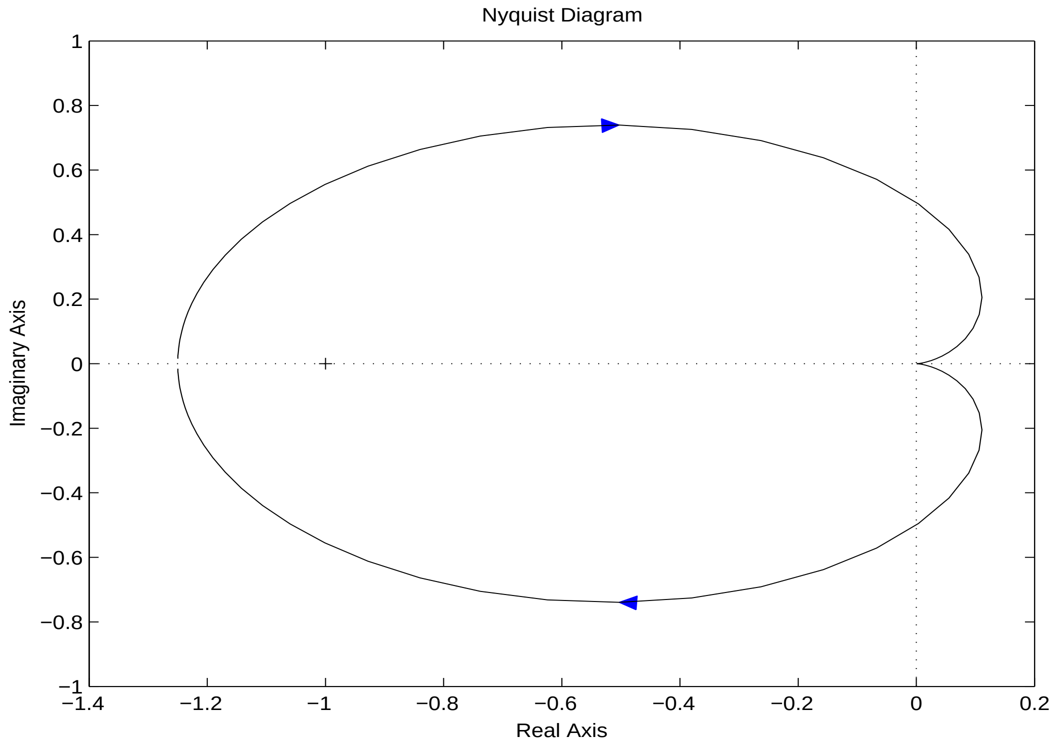
La prima condizione è verificata se e solo se $-1 < K < 0$ mentre la seconda condizione non è mai verificata. Pertanto si ha stabilità BIBO del sistema retroazionatro se e solo se $K \in (-1, 0)$.

Esercizio 3. i) [6 punti] Calcolando la $G(s)$ sull'asse immaginario si trova

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{-5}{(j\omega+1)(j\omega+4)} = \frac{(-5)(-j\omega+1)(-j\omega+4)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)} \\ &= \frac{(-5)[(4-\omega^2)-j5\omega]}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)} \\ &= \frac{5(\omega^2-4)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)} + j\frac{25\omega}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}. \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che, per $\omega > 0$, la parte immaginaria è sempre positiva. La parte reale, per $\omega > 0$, assume valori negativi per $0 < \omega < 2$ e valori positivi per $\omega > 2$.

Per $\omega = 0$ il diagramma parte dal punto $-5/4$, a sinistra del punto critico $-1 + j0$. per $\omega \to +\infty$ sia parte reale che parte immaginaria vanno a zero e quindi il diagramma arriva nell'origine con fase che si trova facilmente essere nulla. Di conseguenza, il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ (la parte per pulsazioni negative si trova tracciando il simmetrico rispetto all'asse reale della porzione di diagramma relativa a pulsazioni positive) è il seguente:



ii) [2.5 punti] È immediato rendersi conto del fatto che il diagramma di Nyquist compie un giro in verso orario attorno al punto $-1 + j0$. Poichè n_{G+}, il numero di poli a parte reale positiva di $G(s)$, è nullo, ne consegue che

$$-1 = N = n_{G+} - n_{W+} = -n_{W+},$$

ovvero il numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$, n_{W+}, è 1. Ciò assicura, in particolare, che $W(s)$ non sia BIBO stabile.

Esercizio 4. [5.5 punti] Adottando le regole per il tracciamento del luogo (positivo) delle radici,

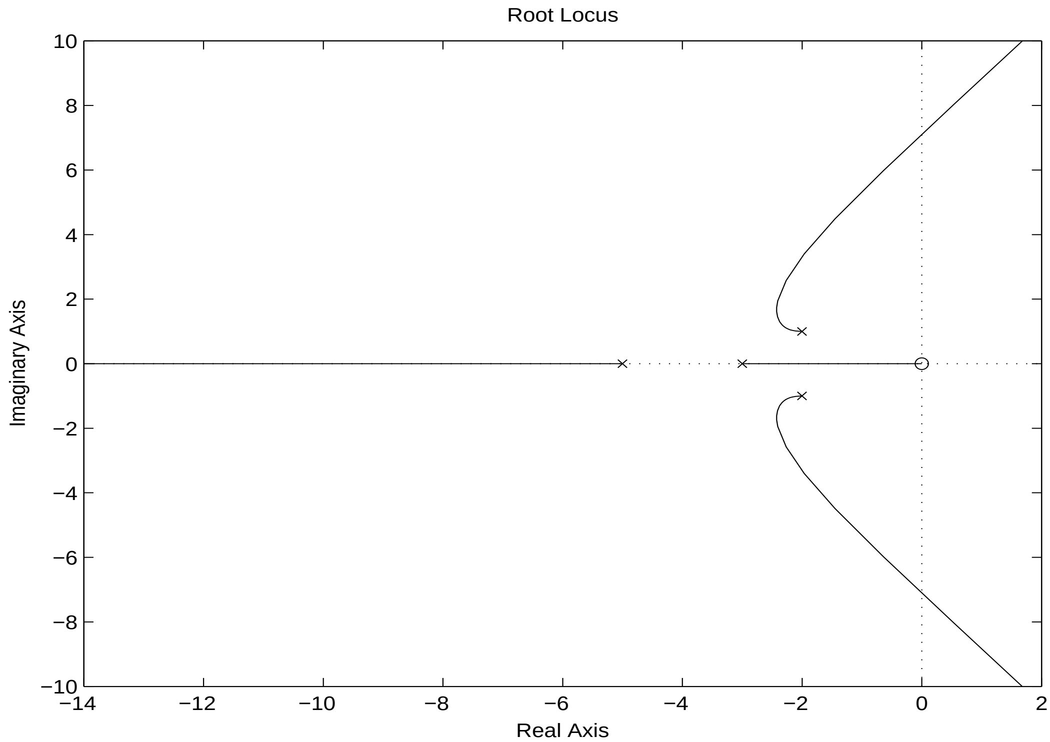
1. verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $(-\infty, -5]$ e $[-3, 0]$.

2. Poichè il numero dei poli è $n = 4$ mentre il numero di zeri è $m = 1$, ne consegue che un ramo si chiude al finito (l'intervallo sul semiasse reale $[-3, 0]$) mentre tre rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $\pi/3, \pi$ e $5\pi/3$.

3. Il baricentro da cui partono gli asintoti è

$$\sigma_c = \frac{-5 - 3 - 2 - j - 2 + j - 0}{4 - 1} = -3.$$

Senza fare ulteriori conti possiamo dedurre ora l'andamento qualitativo del sistema ottenendo in tal modo


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−14
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2