COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI DEL 13 LUGLIO 2005
Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica ed Energetica

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2(1-a)y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si studi la stabilità (asintotica/semplice e BIBO) del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) per $a = 0$ si determini l'evoluzione libera del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

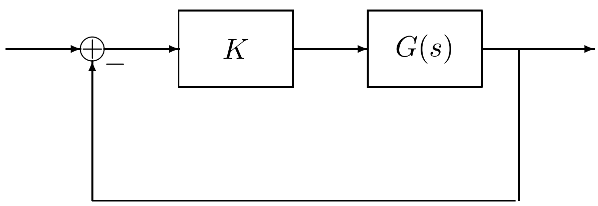
$$y(0^-) = 1, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 5.$$

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{100s(s+1)}{(s-10)(s+0.1)^2}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

ii) Si supponga di applicare al precedente sistema un controllo in retroazione (unitaria negativa) sulla cui catena di azione diretta agisca un controllore proporzionale K come illustrato in figura:



Si studi la stabilità BIBO del sistema retroazionato al variare di K in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s(s-1)(s+4)}.$$

i) Si tracci il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza $G(j\omega)$, al variare di ω in $\mathbb{R}$, e

ii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa a partire da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 4. Si tracci almeno approssimativamente il luogo (positivo) delle radici della funzione $W(s)$, ottenuta per retroazione unitaria negativa a partire da

$$G(s) = K\frac{s(s+5)}{(s+1)(s+2)(s^2+4)}, \qquad K \in \mathbb{R}, K \geq 0.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3.5 punti] Equazione caratteristica è

$$0 = 2s^2 + 4s + 2(1 - a).$$

È evidente, in base alla regola dei segni di Cartesio (o, equivalentemente, in base alla tabella di Routh) che questo polinomio ha entrambe le radici nel semipiano reale sinistro aperto se e solo se $1 - a > 0$, ovvero $a < 1$. Se invece $a > 1$ il sistema ha una radice (a parte) reale positiva e quindi è instabile. Infine, per $a = 1$ il sistema ha una radice nulla ed una reale negativa. Di conseguenza il sistema è semplicemente stabile.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, il sistema è sicuramente BIBO stabile nel caso in cui sia asintoticamente stabile, ovvero per $a < 1$. È possibile che esistano valori del parametro a per cui il sistema è BIBO senza essere asintoticamente stabile. Ciò si verifica quando la funzione di trasferimento del sistema ha i poli a parte reale negativa nonostante gli zeri dell'equazione caratteristica non siano tutti a parte reale negativa. La funzione di trasferimento del sistema, dedotta immediatamente dall'equazione differenziale del sistema, è

$$W(s) = \frac{s - 1}{2s^2 + 4s + 2(1 - a)}.$$

L'unica situazione in cui si può avere stabilità BIBO senza la stabilità asintotica è quella in cui lo zero instabile (collocato in 1) del numeratore cancella un analogo zero in 1 del denominatore, e lo zero rimanente al denominatore è reale negativo. Il polinomio al denominatore si annulla in 1 se e solo se

$$0 = 2 + 4 + 2(1 - a) = 8 - 2a,$$

ovvero $a = 4$. Per tale valore di a il polinomio diventa

$$2s^2 + 4s - 6,$$

e osservando che tale polinomio presenta (nella tabella di Routh) una permanenza di segno ed una variazione, posso dire che l'altra radice è certamente reale negativa. Pertanto c'è stabilità BIBO anche per $a = 4$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica diventa

$$0 = 2s^2 + 4s + 2 = 2(s + 1)^2$$

ed ha un solo zero in -1 di molteplicità due. I modi corrispondenti a questo zero sono: $e^{-t}, t \cdot e^{-t}$. Pertanto l'evoluzione libera assume la seguente espressione:

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t \cdot e^{-t}$$

Il calcolo della derivata prima porta a

$$\frac{dy_\ell}{dt} = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t \cdot e^{-t}.$$

Valutando la funzione e la sua derivata in corrispondenza a 0 si trova:

$$\begin{aligned} 1 = y(0^-) = y_\ell(0) &= c_1 \\ 5 = \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell}{dt} &= -c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Da ciò segue

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = 6.$$

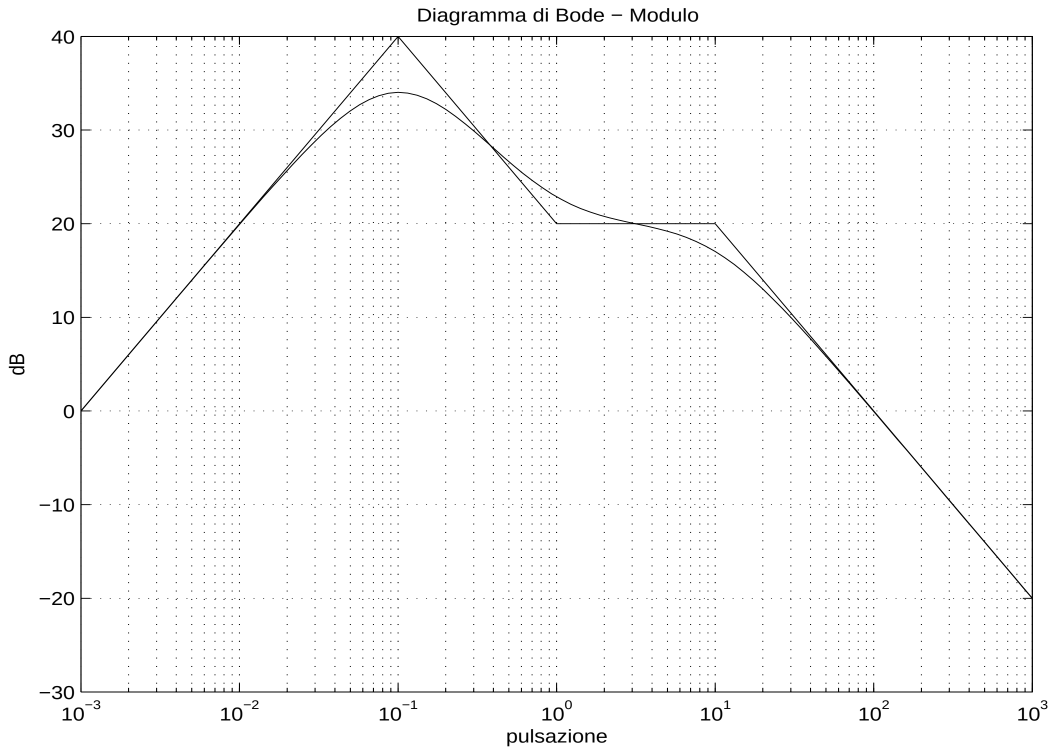
Pertanto l'evoluzione libera risulta

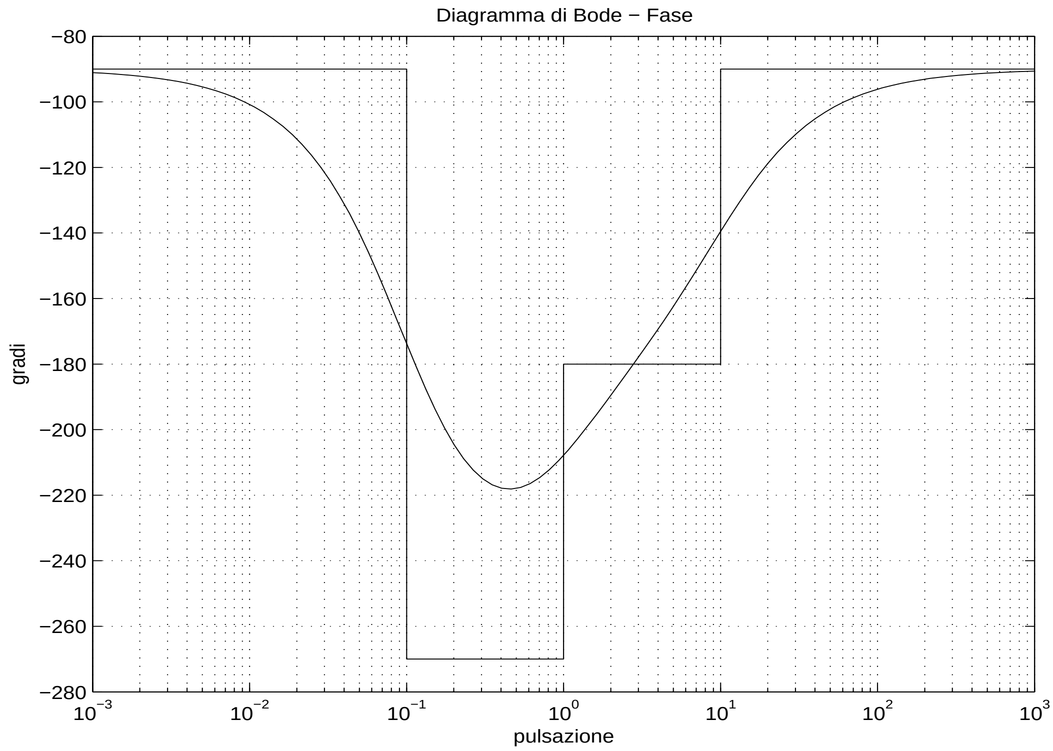
$$y_\ell(t) = e^{-t} + 6t \cdot e^{-t}.$$

Esercizio 2. i) [6 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$G(s) = -10^3 \, \frac{(1+s)s}{(1-0.1s)\,(1+10s)^2}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento ha guadagno di Bode -10^3 (ovvero $|K_B|_{\text{dB}} = 60$ dB e $\arg(K_B) = -180^o$). I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi presentano inoltre tre punti di spezzamento: uno corrispondente ad un polo reale positivo in 10, uno corrispondente ad uno zero reale negativo in -1 ed uno corrispondente ad un polo reale negativo di molteplicità 2 in -10^{-1}. Oltre a questi termini, inoltre, bisogna tener conto dello zero nell'origine, che fa partire il diagramma delle ampiezze con pendenza 20 dB/decade e dà un contributo di 90^o al diagramma delle fasi (che parte, pertanto, dal valore -90^o). Il risultato è illustrato in figura.





ii) [3.5 punti] La funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa è

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K\frac{100s(s+1)}{(s-10)(s+0.1)^2}}{1+K\frac{100s(s+1)}{(s-10)(s+0.1)^2}} = \frac{100Ks(s+1)}{(s-10)(s+0.1)^2+K100s(s+1)} \\ &= \frac{100Ks(s+1)}{s^3+(100K-9.8)s^2+(100K-1.99)s-0.1} \end{aligned}$$

Poichè la rappresentazione così ottenuta per la funzione di trasferimento del sistema in retroazione è coprima, tale sistema risulterà BIBO stabile se e solo se il polinomio al denominatore

$$d(s) = s^3+(100K-9.8)s^2+(100K-1.99)s-0.1$$

è di Hurwitz.

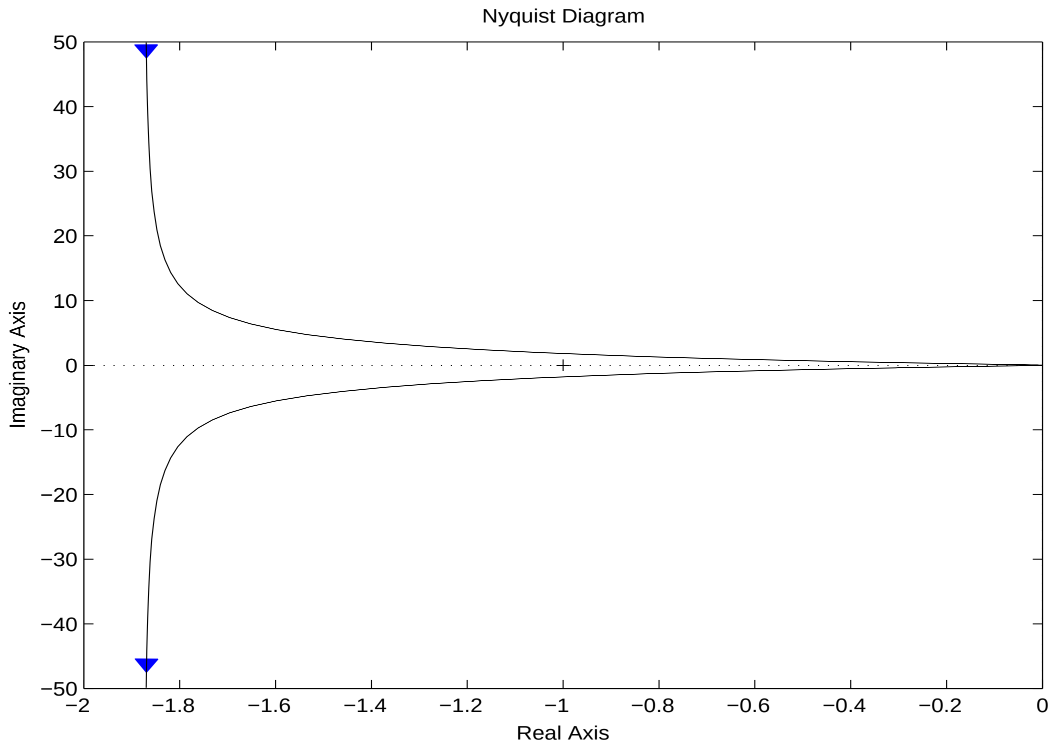
Ciò non è mai possibile dal momento che i coefficienti non sono mai tutti dello stesso segno (il coefficiente del termine di terzo grado è positivo, mentre il termine noto è negativo).

Esercizio 3. i) [6 punti] Calcolando la $G(s)$ sull'asse immaginario si trova

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{10}{j\omega(j\omega-1)(j\omega+4)} = \frac{(-10j)(-j\omega-1)(-j\omega+4)}{\omega(1+\omega^2)(16+\omega^2)} \\ &= \frac{(10j)[(4+\omega^2)+j3\omega]}{\omega(1+\omega^2)(16+\omega^2)} \\ &= \frac{-30}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)} + j\frac{10(\omega^2+4)}{\omega(1+\omega^2)(16+\omega^2)}. \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che, per $\omega > 0$, la parte immaginaria è sempre positiva e la parte reale sempre negativa.

Per $\omega = 0$ il diagramma parte dal punto improprio. In realtà è immediato rendersi conto del fatto che per ω che tende a zero da destra la parte immeginaria tende a $+\infty$ mentre la parte reale tende a $-15/8$, a sinistra del punto critico $-1 + j0$. per $\omega \to +\infty$ sia parte reale che parte immaginaria vanno a zero e quindi il diagramma arriva nell'origine con fase che si trova facilmente essere $+90^o$. Di conseguenza, il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ (la parte per pulsazioni negative si trova tracciando il simmetrico rispetto all'asse reale della porzione di diagramma relativa a pulsazioni positive) è il seguente:



ii) [3 punti] Una volta riportato il diagramma al finito, facendo un arco dal punto $\omega = -\varepsilon$ al punto $\omega = \varepsilon$, è immediato rendersi conto del fatto che il diagramma di Nyquist compie un giro in verso orario attorno al punto $-1 + j0$. Poichè n_{G+}, il numero di poli a parte reale positiva di $G(s)$, è 1, ne consegue che

$$-1 = N = n_{G+} - n_{W+} = 1 - n_{W+},$$

ovvero il numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$, n_{W+}, è 2. Ciò assicura, in particolare, che $W(s)$ non sia BIBO stabile.

Esercizio 4. [4.5 punti] Adottando le regole per il tracciamento del luogo (positivo) delle radici,

1. verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $[-5, -2]$ e $[-1, 0]$.

2. Poichè il numero dei poli è $n = 4$ mentre il numero di zeri è $m = 2$, ne consegue che due rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $\pi/2$ e $3\pi/2$.

3. Il baricentro da cui partono gli asintoti è

$$\sigma_c = \frac{-2 - 1 - 2j + 2j + 5}{4 - 2} = 1.$$

Senza fare ulteriori conti possiamo dedurre ora l'andamento qualitativo del sistema ottenendo in tal modo