COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI DEL 14 SETTEMBRE 2005
Corsi di Laurea in Ingegneria Elettrotecnica ed Energetica

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{1}{4}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{a}{4}y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si studi la stabilità (asintotica/semplice e BIBO) del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) per $a = 0$ si determini (ricorrendo alle trasformate di Laplace) l'evoluzione forzata del sistema in corrispondenza alla sollecitazione d'ingresso

$$u(t) = e^t\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{10(s^2 + 100)}{s(s + 100)(s + 0.1)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

ii) Si determini un modello ingresso/uscita instabile, descritto da un'equazione differenziale lineare, avente $W(s)$ come funzione di trasferimento.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s + 1)(s + 5)}.$$

i) Si tracci il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza $G(j\omega)$, al variare di ω in $\mathbb{R}$, e

ii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa a partire da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 4. Si tracci almeno approssimativamente il luogo (positivo) delle radici della funzione $W(s)$, ottenuta per retroazione unitaria negativa a partire da

$$G(s) = K\frac{(s^2 + 4s + 5)(s - 1)}{s(s + 0.1)(s + 2)(s^2 + 1)}, \qquad K \in \mathbb{R}, K \geq 0.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] L'equazione caratteristica è

$$0 = s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{a}{4}.$$

La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s) = s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{a}{4}$ è:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{a}{4} \\ 1 & \frac{1-a}{4} & 0 \\ 0 & \frac{a}{4} & 0 \end{array}$$

È evidente, in base alla tabella di Routh, che questo polinomio ha entrambe le radici nel semipiano reale sinistro aperto se e solo se $1 - a > 0$ e $a > 0$, ovvero $0 < a < 1$. Se invece $a \notin [0, 1]$ il sistema ha almeno una radice (a parte) reale positiva e quindi è instabile. Infine, per $a = 0$ il sistema ha una radice nulla mentre le altre sono reali negative. Di conseguenza il sistema è semplicemente stabile. Per $a = 1$, invece, $d(s) = s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{1}{4} = (s + 1)\left(s^2 + \frac{1}{4}\right)$ e quindi il sistema è semplicemente stabile.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, il sistema è sicuramente BIBO stabile nel caso in cui sia asintoticamente stabile, ovvero per $0 < a < 1$. È possibile che esistano valori del parametro a per cui il sistema è BIBO senza essere asintoticamente stabile. Ciò si verifica quando la funzione di trasferimento del sistema ha i poli a parte reale negativa nonostante gli zeri dell'equazione caratteristica non siano tutti a parte reale negativa. La funzione di trasferimento del sistema, dedotta immediatamente dall'equazione differenziale del sistema, è

$$W(s) = \frac{s - 1}{s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s + \frac{a}{4}}.$$

L'unica situazione in cui si può avere stabilità BIBO senza la stabilità asintotica è quella in cui lo zero instabile (collocato in 1) del numeratore cancella un analogo zero in 1 del denominatore, e gli zeri rimanenti al denominatore hanno parte reale negativa. Il polinomio al denominatore si annulla in 1 se e solo se

$$0 = 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{a}{4} = \frac{9}{4} + \frac{a}{4},$$

ovvero $a = -9$. Per tale valore di a il polinomio diventa

$$s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s - \frac{9}{4},$$

e osservando che tale polinomio presenta (nella tabella di Routh) una sola variazione di segno, possiamo dire che il polinomio ha una sola radice reale positiva (in 1). Pertanto c'è stabilità BIBO anche per $a = -9$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s-1}{s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s}.$$

La trasformata di Laplace del segnale di ingresso è

$$U(s) = \frac{1}{s-1},$$

e quindi la trasformata di Laplace dell'uscita corrispondente è

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{s-1}{s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s}.$$

La decomposizione in fratti semplici della funzione di trasferimento porta a

$$Y(s) = \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B_0}{s+\frac{1}{2}} + \frac{B_1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2},$$

con

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = 4 \\
B_1 &= \lim_{s\to -\frac{1}{2}} \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot Y(s) = -2 \\
B_0 &= \lim_{s\to -\frac{1}{2}} \left(s + \frac{1}{2}\right) \cdot \left[Y(s) - \frac{B_1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}\right] = -4.
\end{aligned}$$

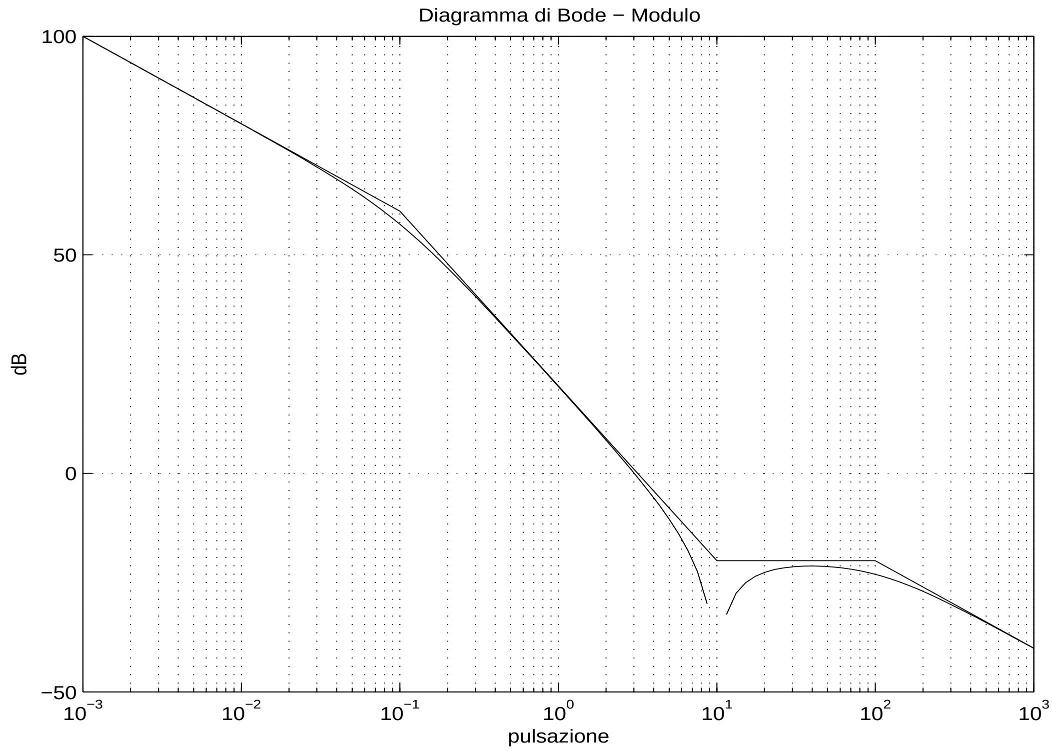
Pertanto

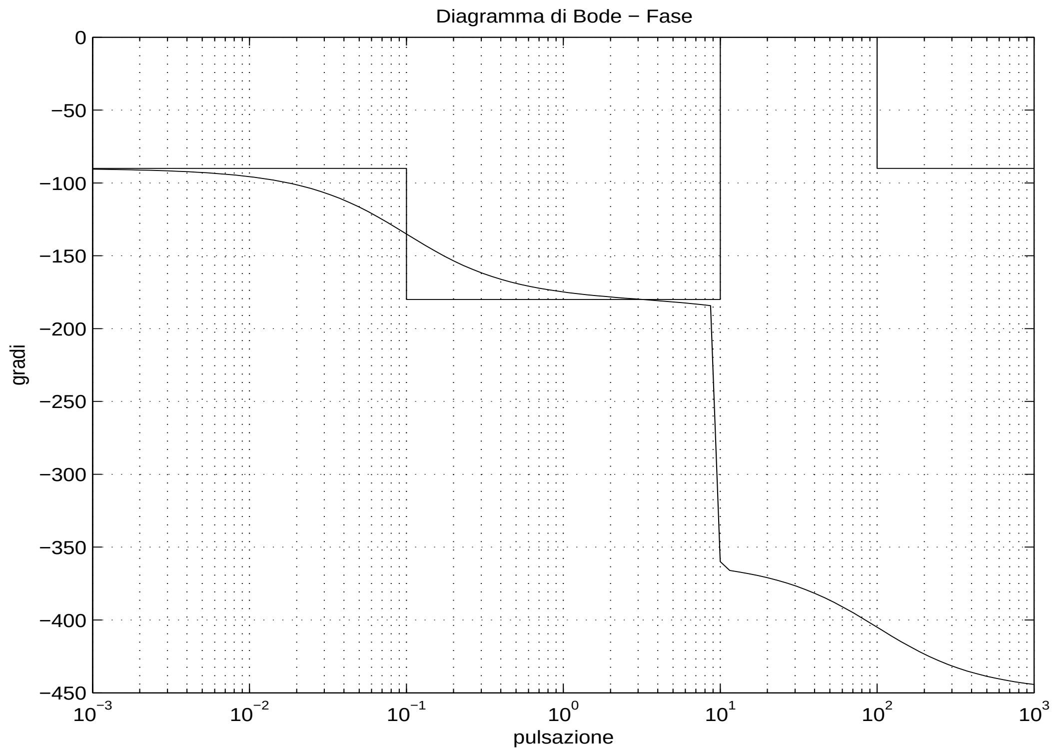
$$y(t) = \left[4 - 4e^{-t/2} - 2te^{-t/2}\right] \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. i) [6 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$G(s) = 10^2 \, \frac{(1 + 0.01s^2)}{s(1+0.01s)\,(1+10s)}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento ha guadagno di Bode 10^2 (ovvero $|K_B|_{\text{dB}} = 40$ dB e $\arg(K_B) = 0^o$). I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi presentano inoltre tre punti di spezzamento: uno corrispondente ad un polo reale negativo in -10^{-1}, uno corrispondente ad un polo reale negativo in -100 ed uno corrispondente ad una coppia di zeri immaginari coniugati in $\pm j10$. Oltre a questi termini, inoltre, bisogna tener conto del polo semplice nell'origine, che fa partire il diagramma delle ampiezze con pendenza -20 dB/decade e dà un contributo di -90^o al diagramma delle fasi (che parte, pertanto, dal valore -90^o). Il risultato è illustrato in figura.





ii) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema può essere riscritta nella forma equivalente

$$W(s) = \frac{10s(s^2+100)}{s^2(s+100)(s+0.1)} = \frac{10s^3+1000s)}{s^4+100.1s^3+10s^2}.$$

Ed essa corrisponde al sistema instabile (dal momento che l'equazione caratteristica ha uno zero doppio in 0)

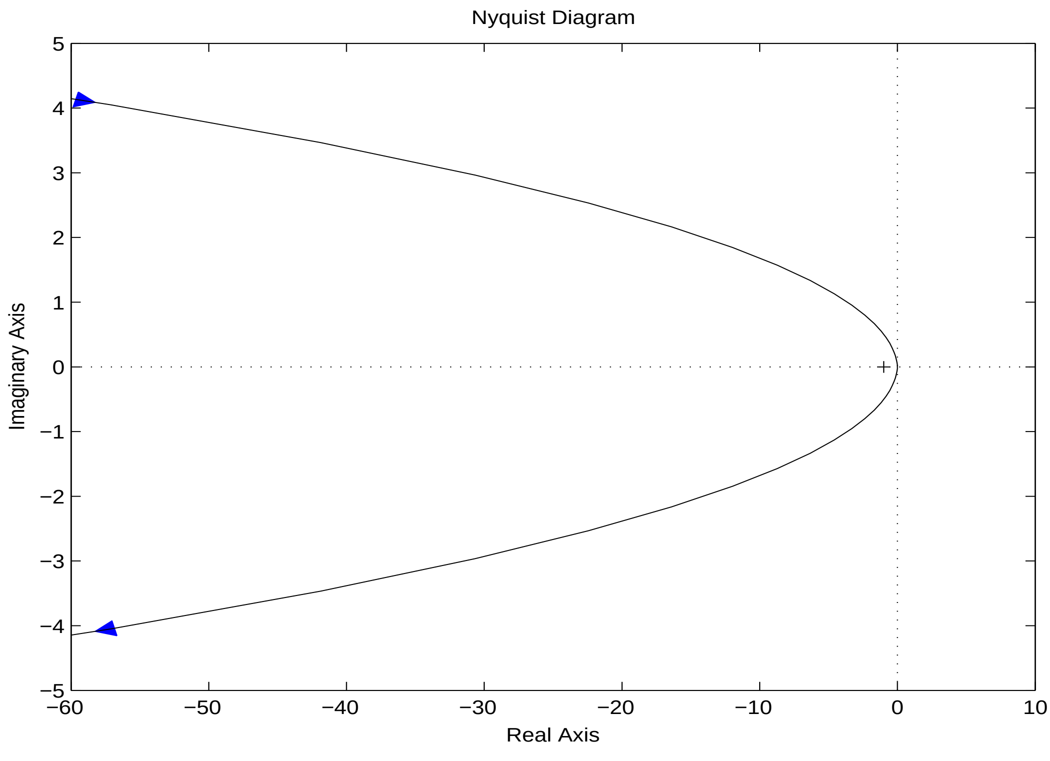
$$\frac{d^4y(t)}{dt^4} + 100.1\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 10\frac{d^2y(t)}{dt^2} = 10\frac{d^3u(t)}{dt^3} + 1000\frac{du(t)}{dt}.$$

Esercizio 3. i) [6 punti] Calcolando la $G(s)$ sull'asse immaginario si trova

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{-\omega^2(j\omega+1)(j\omega+5)} = \frac{-(-j\omega+1)(-j\omega+5)}{\omega^2(1+\omega^2)(25+\omega^2)} \\ &= \frac{-5+\omega^2}{\omega^2(1+\omega^2)(25+\omega^2)} + j\frac{6}{\omega(1+\omega^2)(25+\omega^2)}. \end{aligned}$$

Da ciò si deduce che, per $\omega > 0$, la parte immaginaria è sempre positiva mentre la parte reale è negativa per $0 < \omega < \sqrt{5}$, nulla per $\omega = \sqrt{5}$ e positiva per $\omega > \sqrt{5}$.

Per $\omega = 0$ il diagramma parte dal punto improprio con una fase (si veda, ad esempio, il diagramma di Bode) pari a 180^o. Per $\omega \to +\infty$ sia parte reale che parte immaginaria vanno a zero e quindi il diagramma arriva nell'origine con fase che si trova facilmente essere 0^o. Di conseguenza, il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ (la parte per pulsazioni negative si trova tracciando il simmetrico rispetto all'asse reale della porzione di diagramma relativa a pulsazioni positive) è il seguente (NB in figura non è evidenziato l'attraversamento dell'asse immaginario da parte del diagramma che pure ha luogo per motivi puramente numerici):



ii) [3.5 punti] È immediato rendersi conto del fatto che il diagramma di Nyquist, riportato al finito attraverso un arco di 360^o in verso orario, compie due giri in verso orario attorno al punto $-1 + j0$. Poichè n_{G+}, il numero di poli a parte reale positiva di $G(s)$, è 0, ne consegue che

$$-2 = N = n_{G+} - n_{W+} = -n_{W+},$$

ovvero il numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$, n_{W+}, è 2. Ciò assicura, in particolare, che $W(s)$ non sia BIBO stabile.

Esercizio 4. [5 punti] Adottando le regole per il tracciamento del luogo (positivo) delle radici,

1. verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $[-2, -0.1]$ e $[0, 1]$.
2. Poichè il numero dei poli è $n = 5$ mentre il numero di zeri è $m = 3$, ne consegue che due rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $\pi/2$ e $3\pi/2$.
3. Il baricentro da cui partono gli asintoti è

$$\sigma_c = \frac{(0 - 0.1 - 2 - j + j) - (-2 - j - 2 + j + 1)}{5 - 3} = 0.45.$$

L'unica soluzione possibile è che ci sia un punto doppio nell'intervallo $[-2, -0.1]$ da cui si dipartono due rami che si chiudono nei due zeri complessi $-2 \pm j$, mentre dai due poli immaginari coniugati $\pm j$ si dipartano due rami che assecondano gli asintoti verticali. Senza fare ulteriori conti possiamo dedurre ora l'andamento qualitativo del sistema ottenendo in tal modo