COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
21 Luglio 2005

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 2(1-a)y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si studi la stabilità (asintotica/semplice e BIBO) del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'espressione (in forma reale) dei modi elementari del sistema;

iii) per $a = 0$ si determini l'evoluzione libera del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 5;$$

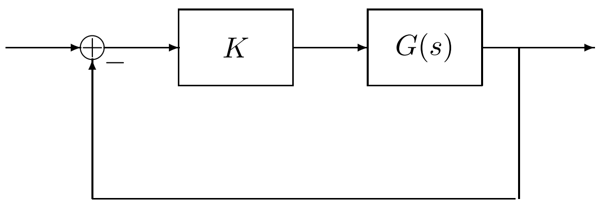
iv) per $a = 1$ si determini, se esiste, un segnale divergente (ma privo di impulsi nell'origine) $u(t)$ a cui corrisponde un'uscita forzata $y(t)$ convergente a zero. [SUGGERIMENTO: si ricorra alle trasformate di Laplace].

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{100s(s+1)}{(s-10)(s+0.1)^2}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

ii) Si supponga di applicare al precedente sistema un controllo in retroazione (unitaria negativa) sulla cui catena di azione diretta agisca un controllore proporzionale K come illustrato in figura:



Si studi la stabilità BIBO del sistema retroazionato al variare di K in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\ \frac{(1+s)}{(s^2+100)(s+0.1)}.$$

i) Si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$ di tipo P, e quindi con la seguente struttura

$$C(s) = K_p,$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato di funzione di trasferimento $W(s)$ sia BIBO stabile e risponda, in evoluzione forzata e in condizioni di regime permanente, al gradino unitario $u(t) = \delta_{-1}(t)$ con il gradino $y_{rp}(t) = -\frac{1}{3}\delta_{-1}(t)$.

ii) Si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$ di tipo PD, e quindi con la seguente struttura

$$C(s) = K_p + K_d s,$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0, con errore di regime permanente (al gradino unitario) non superiore a $e_{rp}^* = 10^{-2}$, pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 100$ rad/sec e margine di fase almeno pari a 45^0.

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita a tempo continuo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \ldots + b_0 u(t), \qquad t \geq 0,$$

con $a_n \neq 0$, si derivi l'espressione dell'evoluzione libera del sistema (nel dominio del tempo) e della sua trasformata di Laplace in corrispondenza alle generiche condizioni iniziali $y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3.5 punti] Equazione caratteristica è

$$0 = 2s^2 + 4s + 2(1-a).$$

È evidente, in base alla regola dei segni di Cartesio (o, equivalentemente, in base alla tabella di Routh) che questo polinomio ha entrambe le radici nel semipiano reale sinistro aperto se e solo se $1-a>0$, ovvero $a<1$. Se invece $a>1$ il sistema ha una radice (a parte) reale positiva e quindi è instabile. Infine, per $a=1$ il sistema ha una radice nulla ed una reale negativa. Di conseguenza il sistema è semplicemente stabile.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, il sistema è sicuramente BIBO stabile nel caso in cui sia asintoticamente stabile, ovvero per $a<1$. È possibile che esistano valori del parametro a per cui il sistema è BIBO senza essere asintoticamente stabile. Ciò si verifica quando la funzione di trasferimento del sistema ha i poli a parte reale negativa nonostante gli zeri dell'equazione caratteristica non siano tutti a parte reale negativa. La funzione di trasferimento del sistema, dedotta immediatamente dall'equazione differenziale del sistema, è

$$W(s) = \frac{s-1}{2s^2+4s+2(1-a)}.$$

L'unica situazione in cui si può avere stabilità BIBO senza la stabilità asintotica è quella in cui lo zero instabile (collocato in 1) del numeratore cancella un analogo zero in 1 del denominatore, e lo zero rimanente al denominatore è reale negativo. Il polinomio al denominatore si annulla in 1 se e solo se

$$0 = 2 + 4 + 2(1-a) = 8 - 2a,$$

ovvero $a=4$. Per tale valore di a il polinomio diventa

$$2s^2 + 4s - 6 = 2(s+3)(s-1).$$

(Alternativamente si può osservare che tale polinomio presenta una permanenza di segno ed una variazione, e quindi l'altra radice è certamente reale negativa). Pertanto c'è stabilità BIBO anche per $a=4$.

ii) [3 punti] Le radici dell'equazione caratteristica sono $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a}$. Tali radici sono reali per $a \geq 0$ e complesse coniugate per $a<0$. In particolare per $a=0$ abbiamo una radice di molteplicità 2 in -1 e modi $e^{-t}, t \cdot e^{-t}$. Per $a>0$ abbiamo radici reali distinte e modi esponenziali $e^{(-1+\sqrt{a})t}, e^{(-1-\sqrt{a})t}$. Per $a<0$ le radici (complesse coniugate) possono essere riscritte nella forma $\lambda_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{-a}$ e ad esse corrispondono i modi reali $e^{-t}\cos(\sqrt{-a}t), e^{-t}\sin(\sqrt{-a}t)$.

iii) [2.5 punti] Per $a=0$ l'equazione caratteristica diventa

$$0 = 2s^2 + 4s + 2 = 2(s+1)^2$$

ed ha un solo zero in -1 di molteplicità due. I modi corrispondenti a questo zero sono: $e^{-t}, t \cdot e^{-t}$. Pertanto l'evoluzione libera assume la seguente espressione:

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t \cdot e^{-t}$$

Il calcolo della derivata prima porta a

$$\frac{dy_\ell}{dt} = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t \cdot e^{-t}.$$

Valutando la funzione e la sua derivata in corrispondenza a 0 si trova:

$$\begin{aligned} 1 = y(0^-) = y_\ell(0) &= c_1 \\ 5 = \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell}{dt} &= -c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Da ciò segue

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = 6.$$

Pertanto l'evoluzione libera risulta

$$y_\ell(t) = e^{-t} + 6t \cdot e^{-t}.$$

iv) [3.5 punti] Per $a = 1$ la funzione di trasferimento del sistema risulta

$$W(s) = \frac{s-1}{2s(s+2)}$$

e pertanto non è BIBO stabile. Se considero un segnale $u(t)$ la cui trasformata è del tipo

$$U(s) = \frac{s}{(s+\lambda)(s-1)},$$

con $\lambda > 0$, è chiaro che tale segnale diverge mentre la corrispondente $Y(s)$ avrà solo poli reali negativi e pertanto corrisponderà ad un segnale convergente. In dettaglio, prendendo $\lambda = 1$ e quindi $u(t) = 0.5[e^{-t} + e^{t}]\delta_{-1}(t)$, si ottiene

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{s-1}{2s(s+2)} \cdot \frac{s}{(s+1)(s-1)} = \frac{1/2}{(s+1)(s+2)}$$

a cui corrisponde

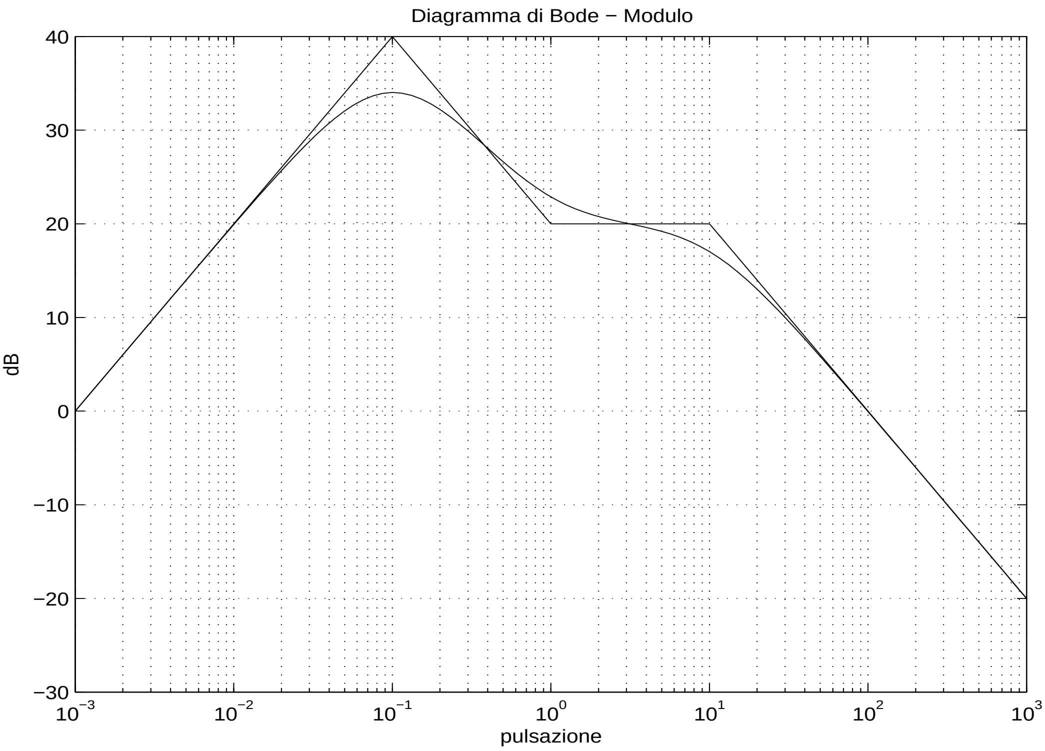
$$y(t) = 0.5[e^{-t} - e^{-2t}]\delta_{-1}(t)$$

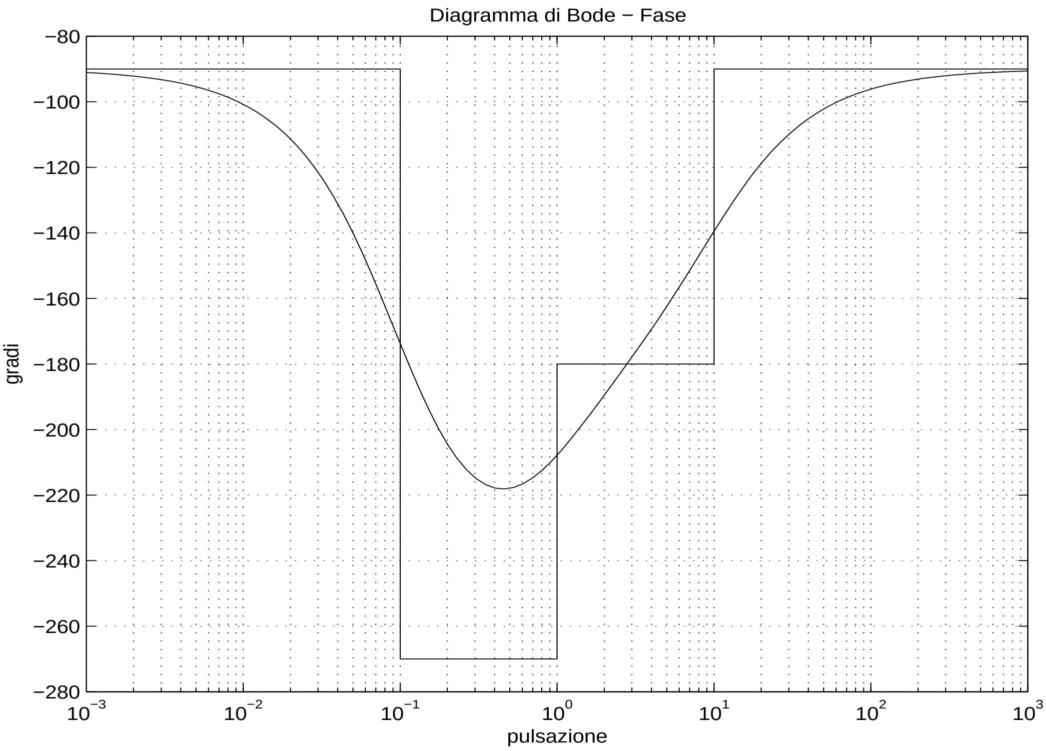
.

Esercizio 2. i) [4 punti] Riscriviamo la funzione di trasferimento in forma di Bode:

$$G(s) = -10^3 \, \frac{(1+s)s}{(1-0.1s)\,(1+10s)^2}.$$

È immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento ha guadagno di Bode -10^3 (ovvero $|K_B|_{\text{dB}} = 60$ dB e $\arg(K_B) = -180^o$). I diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi presentano inoltre tre punti di spezzamento: uno corrispondente ad un polo reale positivo in 10, uno corrispondente ad uno zero reale negativo in -1 ed uno corrispondente ad un polo reale negativo di molteplicità 2 in -10^{-1}. Oltre a questi termini, inoltre, bisogna tener conto dello zero nell'origine, che fa partire il diagramma delle ampiezze con pendenza 20 dB/decade e dà un contributo di 90^o al diagramma delle fasi (che parte, pertanto, dal valore -90^o). Il risultato è illustrato in figura.





ii) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa è

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K\frac{100s(s+1)}{(s-10)(s+0.1)^2}}{1+K\frac{100s(s+1)}{(s-10)(s+0.1)^2}} = \frac{100Ks(s+1)}{(s-10)(s+0.1)^2+K100s(s+1)}$$

$$= \frac{100Ks(s+1)}{s^3 + (100K - 9.8)s^2 + (100K - 1.99)s - 0.1}$$

Poichè la rappresentazione così ottenuta per la funzione di trasferimento del sistema in retroazione è coprima, tale sistema risulterà BIBO stabile se e solo se il polinomio al denominatore

$$d(s) = s^3 + (100K - 9.8)s^2 + (100K - 1.99)s - 0.1$$

è di Hurwitz.

Ciò non è mai possibile dal momento che i coefficienti non sono mai tutti dello stesso segno (il coefficiente del termine di terzo grado è positivo, mentre il termine noto è negativo).

Esercizio 3. i) [3 punti] In corrispondenza ad un controllore del tipo $C(s) = K_p$, la funzione di trasferimento del sistema retroazionato diventa

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{K_pG(s)}{1 + K_pG(s)} = \frac{K_p10(s+1)}{(s^2+100)(s+0.1) + K_p10(s+1)} \\ &= \frac{K_p10(s+1)}{s^3 + 0.1s^2 + (K_p10 + 100)s + (10 + 10K_p)}. \end{aligned}$$

Poichè la rappresentazione così ottenuta per la funzione di trasferimento del sistema in retroazione è coprima, tale sistema risulterà BIBO stabile se e solo se il polinomio al denominatore

$$d(s) = s^3 + 0.1s^2 + (K_p10 + 100)s + (10 + 10K_p)$$

è di Hurwitz. Applicando la tabella di Routh otteniamo

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 10K_p + 100 \\ 2 & 0.1 & 10 + 10K_p \\ & & \\ 1 & -90K_p & 0 \\ & & \\ 0 & 10 + 10K_p & 0 \end{array}$$

È immediato rendersi conto del fatto che la prima colonna della tabella ha tutti gli elementi di ugual segno (positivo) se e solo se $-1 < K_p < 0$. In tal caso il polinomio è di Hurwitz. In tutti gli altri casi, invece, ha almeno uno zero nel semipiano $\mathrm{Re}(s) \geq 0$. La funzione di trasferimento $W(s)$ soddisfa il vincolo posto sulla risposta di regime permanente al gradino se e solo se $W(0) = -1/3$. Imponendo il soddisfacimento di tale vincolo si trova

$$W(0) = \frac{10K_p}{10 + 10K_p} = -\frac{1}{3},$$

ovvero $K_p = -1/4$, valore compatibile con il range di valori per cui si ha BIBO stabilità.

ii) [4 punti] Riscriviamo preliminarmente la $G(s)$ in forma di Bode:

$$G(s) = \frac{1+s}{(1+10s)(1+0.01s^2)}.$$

Da ciò si vede che il guadagno di Bode vale $K_B(G) = 1$. Il controllore, inoltre, può essere riscritto nella forma

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s\right),$$

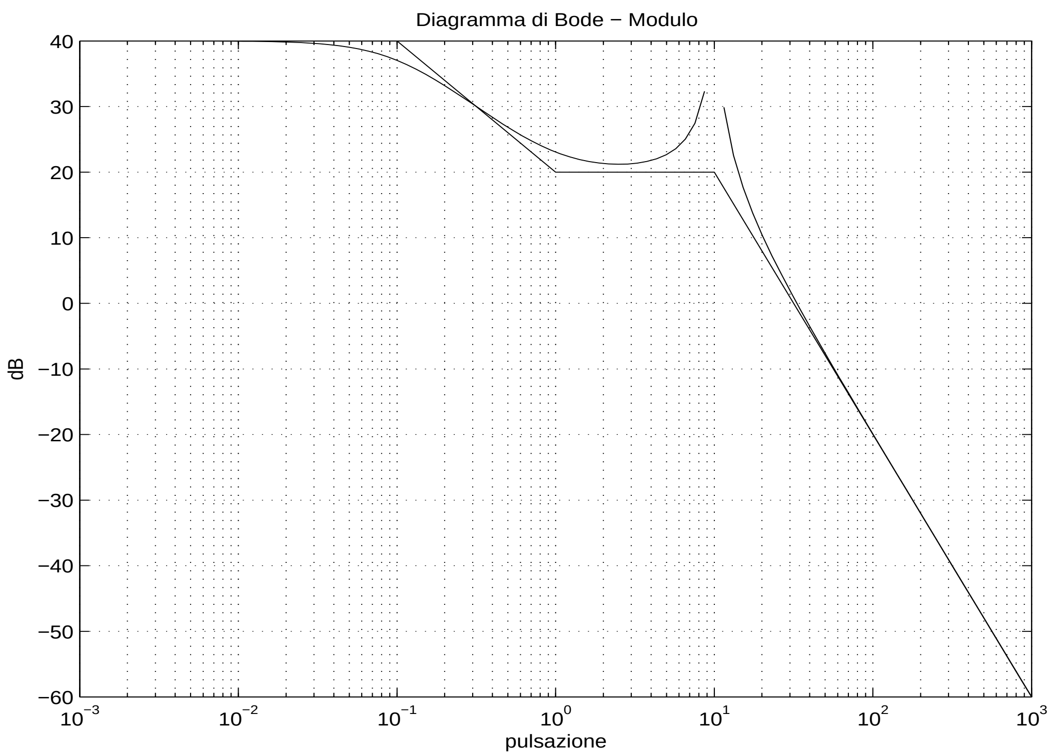
e, pertanto, K_p rappresenta il guadagno di Bode del controllore. Pertanto, se vogliamo che il sistema retroazionato sia di tipo 0 con errore di regime permanente al più 10^{-2}, è sufficiente imporre

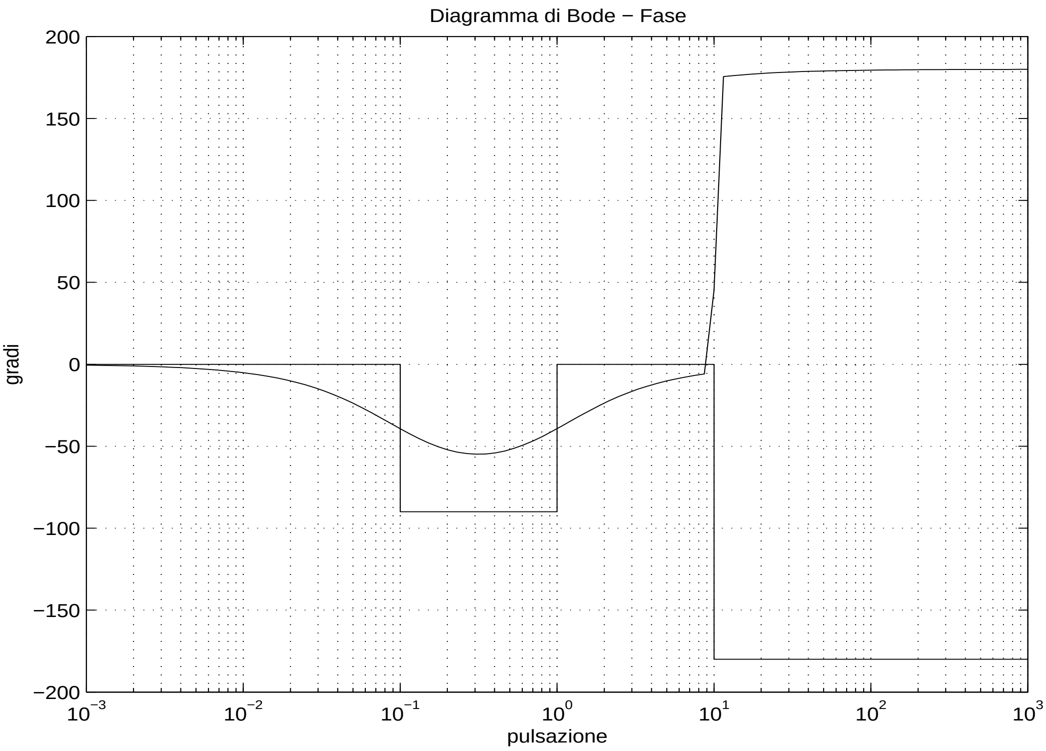
$$e_{rp} = \frac{1}{1+K_p} \leq 10^{-2},$$

ovvero

$$K_p \geq 10^2 - 1.$$

Scegliamo $K_p = 10^2$ e tracciamo il diagramma di Bode di $K_pG(s)$, ottenendo il diagramma di Bode illustrato nella seguente figura.





La pulsazione di attraversamento in questo caso è $\omega_A = 10^{3/2}$ rad/s mentre il margine di fase alla pulsazione desiderata ω_A^* è circa 0^o. Se inseriamo uno zero in -10, ovvero poniamo $\frac{K_d}{K_p} = 0.1$, otteniamo il risultato desiderato sia dal punto di vista della pulsazione di attraversamento che dal punto di vista del margine di fase. Pertanto

$$C(s) = 10^2 + 10s.$$

Teoria. [4 punti] Si veda il libro di testo, Capitolo 2.