I COMPITINO DI CONTROLLI AUTOMATICI
A.A. 2005/2006

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(1 + a - a^2\right)\frac{dy(t)}{dt} + a(1-a)y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2},$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$:

ii) si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 2, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = -2 \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 3;$$

iii) si determini la risposta impulsiva del sistema, $w(t), t \in \mathbb{R}$;

iv) si determini (se esiste) la risposta di regime permanente del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = [1 - \cos(t + \pi/4)]\delta_{-1}(t).$$

[Nota: l'eventuale esistenza della risposta di regime permanente va motivata]

Esercizio 2. Sia

$$W(s) = 100\ \frac{s^2(s-1)}{(s+0.1)(s^2+100)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $W(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) si determini la risposta del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta(t) + 1.1e^t\delta_{-1}(t);$$

iii) si determini un modello ingresso/uscita compatibile con al funzione di trasferimento assegnata;

iv) si determini, se esiste, un ingresso convergente a zero a cui il sistema risponda con un'uscita convergente a zero.
[Suggerimento: è sufficiente ragionare nel dominio delle trasformate di Laplace].

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita a tempo continuo

$$a_n\frac{d^ny(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0y(t) = b_n\frac{d^nu(t)}{dt^n} + \ldots + b_0u(t), \qquad t \geq 0,$$

con $a_n \neq 0$, si derivi l'espressione dei dell'evoluzione libera del sistema (nel dominio del tempo) e della sua trasformata di Laplace in corrispondenza alle generiche condizioni iniziali

$$y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 2s^2 + (1 + a - a^2)s + a(1 - a).$$

Possiamo valutare per quali valori di a essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s) = s^3+2s^2+(1+a-a^2)s+a(1-a)$ è:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 1 + a - a^2 \\
2 & 2 & a - a^2 \\
1 & \dfrac{2 + a - a^2}{2} & 0 \\
0 & a(1 - a) & 0
\end{array}$$

Poichè i primi due elementi in prima colonna sono positivi, l'unica situazione corrispondente alla Hurwitzianità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} \frac{2+a-a^2}{2} > 0 \\ a(1 - a) > 0 \end{cases}$$

La seconda condizione è verificata se e solo se $0 < a < 1$. D'altra parte $2 + a - a^2 = -(a - 2)(a + 1) = (2 - a)(a + 1)$, e pertanto assume valori positivi se e solo se $-1 < a < 2$. Mettendo assieme le due condizioni, si deduce che entrambi i termini risultano positivi se e solo se $0 < a < 1$. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < a < 1$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro a per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro a in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2}{s^3 + 2s^2 + (1 + a - a^2)s + a(1 - a)}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 0, la situazione or ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro a il polinomio al denominatore ha uno zero in 0 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 0 se e solo se $a = 0$ oppure $a = 1$. In entrambi i casi la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2}{s^3 + 2s^2 + s} = \frac{s}{(s + 1)^2}$$

e quindi ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in [0, 1]$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 2s^2 + s = s(s+1)^2$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} 2 = \quad & y(0^-) & = \quad & y_\ell(0^-) & = \quad & c_1 + c_2, \\ -2 = \quad & \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & -c_2 + c_3, \\ 3 = \quad & \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & c_2 - 2c_3, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = c_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad c_3 = -1.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = 1 + e^{-t} - te^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

iii) [2 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{s+1-1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$w(t) = \left[e^{-t} - te^{-t}\right] \delta_{-1}(t).$$

iv) [3 punti] Il sistema è BIBO stabile e il sistema viene sollecitato in pura evoluzione forzata, quindi la risposta di regime permanente al segnale assegnato esiste. Tenuto conto del fatto che $\cos(t + \pi/4) = \cos t \cos(\pi/4) - \sin t \sin(\pi/4)$, la risposta di regime permanente è espressa nella forma

$$\begin{aligned} y_{rp}(t) &= W(0) - [|W(j)| \cos(t + \arg(W(j))) \cos(\pi/4) - |W(j)| \sin(t + \arg(W(j))) \sin(\pi/4)] \\ &= W(0) - |W(j)| \cos(t + \pi/4 + \arg(W(j))). \end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che

$$W(s) = \frac{s}{(s+1)^2}$$

e quindi

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{(1+j\omega)^2}$$

i valori di $W(0), |W(j)|$ e $\arg(W(j))$ sono:

$$W(0) = 0, \qquad |W(j)| = \frac{1}{2}, \qquad \arg(W(j)) = \frac{\pi}{2} - 2\arg(1+j) = \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4} = 0.$$

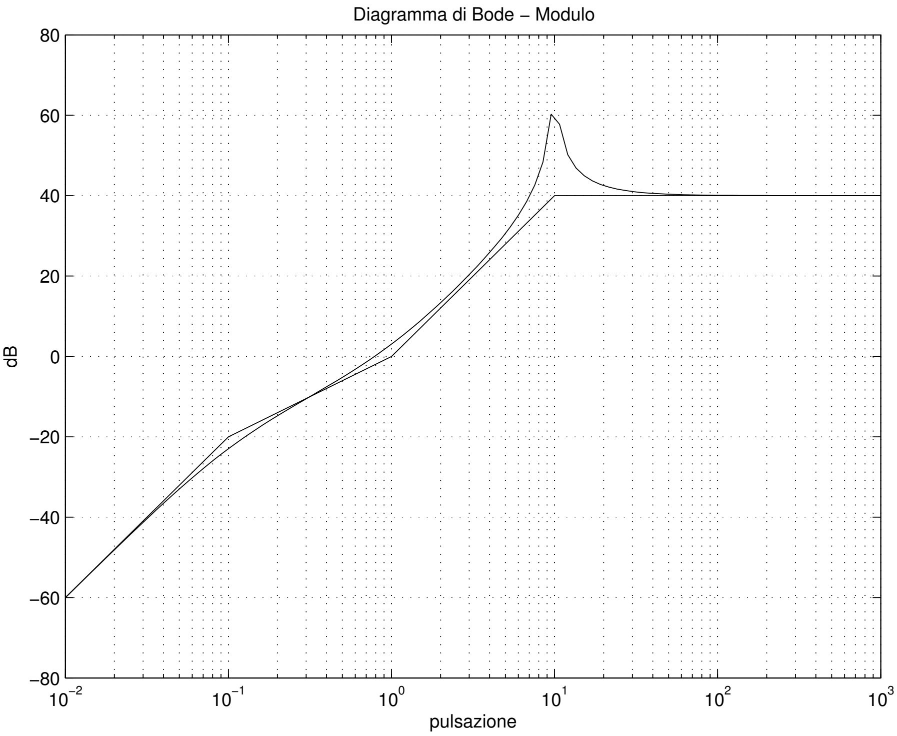
Pertanto

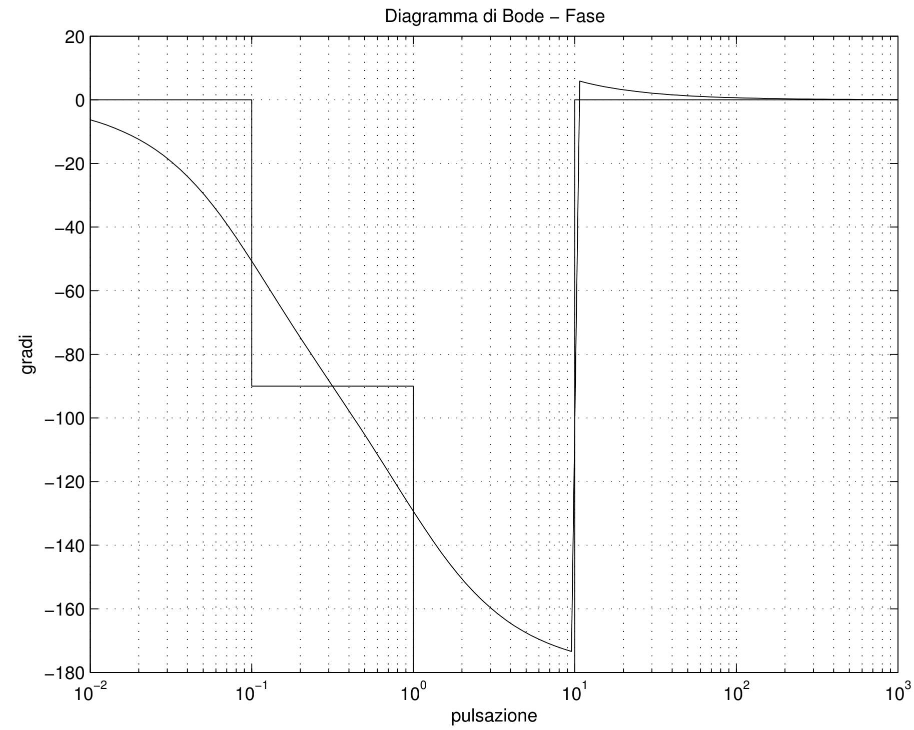
$$y_{rp}(t) = -\frac{1}{2}\cos(t + \pi/4).$$

Esercizio 2. i) [5.5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$W(s) = 100\ \frac{s^2(s-1)}{(s+0.1)(s^2+100)} = -10\ \frac{s^2(1-s)}{(1+10s)\left(1+\frac{s^2}{10^2}\right)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta uno zero doppio nell'origine ($\nu = -2$), uno zero reale positivo con $1/T' = -1$ e $\mu' = 1$, un polo reale negativo con $1/T = 0.1$ e $\mu = 1$, e, infine, una coppia di poli immaginari coniugati in $\pm j10$ ($\omega_n = 10, \xi = 0$) con $\bar{\mu} = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono. (NOTA: per motivi puramente numerici il picco infinito nel diagramma ddelle ampiezze appare come un picco di altezza finita).





ii) [3 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso $u(t) = \delta(t) + 1.1e^t\delta_{-1}(t)$ è

$$U(s) = 1 + 1.1\frac{1}{s-1} = \frac{s+0.1}{s-1}.$$

La trasformata di Laplace della corrispondente evoluzione forzata è data da

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = 100\frac{s^2(s-1)}{(s+0.1)(s^2+100)} \cdot \frac{s+0.1}{s-1} = 100\frac{s^2}{s^2+100}.$$

Lo sviluppo in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$Y_f(s) = 100\frac{s^2+100-100}{s^2+100} = 100 - 10^3\frac{10}{s^2+100}$$

a cui corrisponde l'antitrasformata

$$y_f(t) = 100\delta(t) - 10^3\sin(10t)\delta_{-1}(t).$$

iii) [2 punti] Dai polinomi al numeratore e al denominatore della funzione di trasferimento, è immediato ricavare l'equazione differenziale descrittiva di un modello ingresso/uscita compatibile con la $W(s)$ assegnata. Si trova, infatti,

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 0.1\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 100\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = 100\frac{d^3u(t)}{dt^3} - 100\frac{d^2u(t)}{dt^2}.$$

iv) [2 punti] Si vede subito che applicando al sistema un segnale la cui trasformata di Laplace $U(s)$ sia

$$U(s) = \frac{s^2 + 100}{d(s)},$$

con $d(s)$ polinomio di Hurwitz di grado maggiore di 2, otteniamo un'uscita la cui trasformata $Y(s) = W(s)U(s)$ ha i poli tutti a parte reale negativa. Pertanto i corrispondenti $u(t)$ e $y(t)$ sono entrambi segnali convergenti a zero.

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, Capitolo 2.