

SECONDO COMPITINO DI ANALISI DEI SISTEMI

7 Dicembre 2006 - A.A. 2006/2007

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + Gu(t).$$

- i) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dal solo primo ingresso che attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $(s+1)^2(s+2)$.
- ii) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dal solo secondo ingresso che attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $(s+1)^2(s+2)$.
- iii) Si progetti un controllo in retroazione che faccia uso di entrambi gli ingressi e attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $(s+2)^3$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [0 \quad -1 \quad 1]x(t), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si calcolino, al variare di a in \mathbb{R} , i sottospazi di raggiungibilità e di controllabilità in k passi per ogni $k \in \mathbb{N}$ e si dica, per ciascun valore di a , se il sistema è raggiungibile e/o controllabile a zero.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$

- ii) si determini un controllore dead-beat che renda la matrice $F+gK$ del sistema retroazionato nilpotente con indice di nilpotenza minimo;
- iii) si progetti, se possibile, una retroazione dallo stato che attribuisca al risultante sistema retroazionato tutti e soli i modi $\delta(k)$ e 2^k .

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si dimostri che un generico modello di stato $\Sigma = (F, G, H)$ di dimensione n e non raggiungibile è algebricamente equivalente ad un modello di stato in forma standard di raggiungibilità.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] Se osserviamo la coppia (F, g_1) , dove g_1 è la prima colonna di G , è immediato verificare che tale coppia è raggiungibile, dal momento che la matrice di raggiungibilità della coppia, i.e.

$$\mathcal{R}_1 = [g_1 \mid Fg_1 \mid F^2g_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

è quadrata e non singolare. Se pongo $k_1 = [a \ b \ c]$, considero il polinomio caratteristico della matrice

$$F + g_1k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ a & b & c-1 \end{bmatrix},$$

ovvero $\Delta_{F+g_1k_1}(s) = s^3 - cs^2 + (c-b)s + (1-c-a)$, e impongo $\Delta_{F+g_1k_1}(s) \equiv (s+1)^2(s+2) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$, ottengo $c = -4, b = -9$ e $a = 3$. In altre parole, $k_1 = [3 \ -9 \ -4]$.

ii) [4 punti] Considero la coppia (F, g_2) , dove g_2 è la seconda colonna di G . Poiché la matrice di raggiungibilità di tale coppia è

$$\mathcal{R}_2 = [g_2 \mid Fg_2 \mid F^2g_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il sistema non è raggiungibile dal secondo ingresso. Si tratta allora di andare a vedere qual'è la matrice del sottosistema non raggiungibile. Poiché il sottospazio di raggiungibilità ha rango 2, ne consegue che F_{22} è, di fatto, uno scalare. Resta quindi da capire qual'è l'unico autovalore del sottosistema non raggiungibile.

È facile verificare che la coppia (F, g_2) è in forma standard di raggiungibilità e pertanto $F_{22} = [-1]$. Pertanto esiste la soluzione al problema di controllo in retroazione posto. Se pongo $k_2 = [a \ b \ c]$, Vista la struttura triangolare a blocchi della matrice del sistema ed il fatto che la coppia (F, g_2) si trova in forma standard di raggiungibilità, è immediato verificare che il parametro c è del tutto irrilevante e che è sufficiente selezionare i parametri a e b in modo tale che la matrice del sottosistema raggiungibile del sistema retroazionato, ovvero

$$[F + g_2k_2]_{11} = \begin{bmatrix} a & 1+b \\ -1+a & 1+b \end{bmatrix},$$

abbia polinomio caratteristico $(s+1)(s+2)$. Poiché il polinomio caratteristico della precedente matrice è

$$s^2 - (a+b+1)s + 1+b,$$

eguagliandolo a $(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$ si trova $a = -5$ e $b = 1$. Pertanto il controllore in retroazione dal secondo ingresso che abbiamo cercato è del tipo $k_2 = [-5 \ 1 \ c]$, con c arbitrario in \mathbb{R} .

iii) [4.5 punti] Sia

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

La matrice $F + GK$ del sistema retroazionato risulta

$$F + GK = \begin{bmatrix} a_2 & 1 + b_2 & c_2 \\ -1 + a_2 & 1 + b_2 & 1 + c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 - 1 \end{bmatrix}.$$

Ci accorgiamo quindi, che gli elementi dell'ultima riga sono completamente arbitrari e indipendenti dagli altri e possiamo quindi sceglierli in modo tale che

$$F + GK = \begin{bmatrix} a_2 & 1 + b_2 & c_2 \\ -1 + a_2 & 1 + b_2 & 1 + c_2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(ciò corrisponde ad imporre che $a_1 = b_1 = 0$ e $c_1 = -1$). A questo punto ci troviamo (come accadeva al punto ii) di questo esercizio) con una matrice triangolare a blocchi e si tratta di scegliere i parametri a_2 e b_2 (c_2 ancora una volta è arbitrario e possiamo assumerlo nullo, ad esempio) in modo tale che la matrice

$$\begin{bmatrix} a_2 & 1 + b_2 \\ -1 + a_2 & 1 + b_2 \end{bmatrix}$$

abbia polinomio caratteristico $(s+2)^2$. Poiché il polinomio caratteristico della precedente matrice è

$$s^2 - (a_2 + b_2 + 1)s + 1 + b_2,$$

eguagliandolo a $(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4$ si trova $a_2 = -8$ e $b_2 = 3$. Pertanto il controllore in retroazione è

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -8 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. i) [5 punti] Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$X_1^R = \text{Im}G = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$X_2^R = \text{Im}[G \quad FG] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 + a \end{bmatrix}.$$

Con riferimento a X_2^R si distinguono due casi: 1) per $a = 1$ le due colonne della matrice $[G \quad FG]$ sono linearmente dipendenti e pertanto

$$X_2^R = X_1^R = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

2) Per $a \neq 1$ le due colonne sono linearmente indipendenti e quindi

$$X_2^R = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Chiaramente ha senso esplorare il caso di raggiungibilità in tre passi solo per $a \neq 1$ e in quel caso si trova

$$X_3^R = \text{Im}[G \quad FG \quad F^2G] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1+a & 3a+1 \end{bmatrix} = X_2^R.$$

Pertanto il sistema non è mai raggiungibile, tuttavia per $a = 1$ il sottospazio raggiungibile ha dimensione 1, mentre per $a \neq 1$ il sottospazio $X^R = X_2^R$ ha dimensione 2.

Valutiamo ora i sottospazi di controllabilità.

$$\begin{aligned} X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \text{Im}G\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + 2x_2 \\ ax_2 + x_3 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 + 2x_2 = ax_2 + x_3 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 = x_1 + (2-a)x_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + (2-a)x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2-a \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Per il calcolo del sottospazio di controllabilità in due passi distinguiamo il caso $a = 1$ dal caso $a \neq 1$. Per $a = 1$ si ha

$$\begin{aligned} X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \text{Im}[G \quad FG]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : 2x_1 + 4x_2 = x_1 + 3x_2 + x_3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 = x_1 + x_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = X_1^C. \end{aligned}$$

Pertanto, per $a = 1$ il sistema non è controllabile a zero. Per $a \neq 1$, invece,

$$X_2^C = \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \text{Im}[G \quad FG]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ ax_1 + 3ax_2 + x_3 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} = \mathbb{R}^3.$$

Pertanto il sistema (che non è mai raggiungibile) per $a \neq 1$ è controllabile a zero in due passi.

ii) [4 punti] Per $a = 1$ la coppia (F, G) diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e in base all'analisi condotta al punto i) sappiamo che tale coppia non è raggiungibile ma è controllabile a zero. Questo ci assicura automaticamente l'esistenza di un controllore dead-beat. Se introduciamo la matrice $K = [a \quad b \quad c]$ in forma parametrica, otteniamo

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 + a & 2 + b & c \\ a & b & 1 + c \end{bmatrix}.$$

Poiché tale matrice ha una struttura triangolare a blocchi, ne deduco che il suo polinomio caratteristico è il prodotto del fattore z per il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{bmatrix} 2 + b & c \\ b & 1 + c \end{bmatrix},$$

ovvero $z \cdot [z^2 - (3 + b + c)z + (2 + b + 2c)]$, e quindi non dipende dal parametro a . Imponendo che tale polinomio coincida con z^3 si trova $b = -4$ e $c = 1$. Pertanto i controllori dead-beat sono tutti e soli quelli nella forma

$$K = [a \quad -4 \quad 1]$$

al variare di a in \mathbb{R} . In corrispondenza al generico controllore dead-beat si trova

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 + a & -2 & 1 \\ a & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Chiaramente tale matrice non sarà mai la matrice nulla e quindi non è possibile attribuirle indice di nilpotenza 1. La matrice avrà indice di nilpotenza 2 se e solo se la molteplicità di 0 come autovalore del polinomio minimo sarà 2 e ciò è possibile, in questo contesto, se e solo se la molteplicità geometrica di 0 come autovalore di $F + GK$ sarà 2. Ciò equivale a chiedere che il rango di $F + GK - 0I_3 = F + GK$ sia 1. Tale condizione è verificata se e solo se $a = 2(1 + a)$ ovvero se e solo se $a = -2$. In tutti gli altri casi l'indice di nilpotenza sarà 3. Pertanto il controllore dead-beat che attribuisce a $F + GK$ indice di nilpotenza minimo (pari a 2) sarà

$$K = [-2 \quad -4 \quad 1].$$

iii) [4.5 punti] Imporre che la matrice $F + GK$ abbia unicamente i modi $\delta(k)$ e 2^k equivale ad imporre che il polinomio minimo della matrice $F + GK$ sia $\psi_{F+GK}(z) = z(z - 2)$. Questo polinomio minimo è compatibile con due polinomi caratteristici: (1) $\Delta_{F+GK}(z) = z^2(z - 2)$ e (2) $\Delta_{F+GK}(z) = z(z - 2)^2$. Valutiamo prima la soluzione (1). Dall'analisi condotta al precedente

punto ii) sappiamo che $\Delta_{F_{22}}(z) = z \mid z^2(z-2)$ e pertanto esiste una matrice di retroazione K che attribuisce alla matrice $F + GK$ del risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico $z^2(z-2)$. Inoltre, posto $K = [a \ b \ c]$, per la struttura triangolare a blocchi della matrice $F + GK$, il problema è risolvibile imponendo che il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{bmatrix} 2+b & c \\ b & 1+c \end{bmatrix},$$

ovvero $z^2 - (3+b+c)z + (2+b+2c)$ (indipendente dal parametro a) sia $z(z-2) = z^2 - 2z$. I controllori K tali che $\Delta_{F+GK}(z) = z^2(z-2)$ sono tutti e soli quelli nella forma

$$K = [a \ 0 \ -1]$$

al variare di a in \mathbb{R} . In corrispondenza al generico controllore K di questo tipo si trova

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+a & 2 & -1 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice ha polinomio minimo $\psi_{F+GK}(z) = z(z-2)$ se e solo se la molteplicità di 0 come autovaleore del polinomio minimo è 2 e ciò è possibile, in questo contesto, se e solo se la molteplicità geometrica di 0 come autovaleore di $F + GK$ è 2. Ciò equivale a chiedere che il rango di $F + GK - 0I_3 = F + GK$ sia 1. Poiché

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+a & 2 & -1 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tale condizione è verificata se e solo se $a = 0$. Pertanto un controllore che attribuisca alla matrice $F + GK$ del sistema retroazionato tutti e soli i modi desiderati sarà

$$K = [0 \ 0 \ -1].$$

Valutiamo, per completezza, anche il caso (2). In questo caso è necessario imporre che il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{bmatrix} 2+b & c \\ b & 1+c \end{bmatrix},$$

ovvero $z^2 - (3+b+c)z + (2+b+2c)$ (indipendente dal parametro a) sia $(z-2)^2 = z^2 - 4z + 4$. I controllori K tali che $\Delta_{F+GK}(z) = z(z-2)^2$ sono tutti e soli quelli nella forma

$$K = [a \ 0 \ 1]$$

al variare di a in \mathbb{R} . In corrispondenza al generico controllore K di questo tipo si trova

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+a & 2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice ha polinomio minimo $\psi_{F+GK}(z) = z(z-2)$ se e solo se la molteplicità di 2 come autovalore del polinomio minimo è 2 e ciò è possibile, in questo contesto, se e solo se la molteplicità geometrica di 2 come autovalore di $F+GK$ è 2. Ciò equivale a chiedere che il rango di $F+GK-2I_3$ sia 1. Poiché

$$F + GK = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1+a & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tale condizione non è mai verificata. Pertanto la soluzione

$$K = [0 \quad 0 \quad -1]$$

è l'unica possibile.

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini “Appunti di Teoria dei Sistemi”, Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.