COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
20 Settembre 2006

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi, al variare di a, l'osservabilità del sistema dalla sola prima uscita e dalla sola seconda uscita, separatamente, senza calcolare esplicitamente la matrice di osservabilità in nessuno dei due casi.

ii) Per $a = 1/2$ si determini, se esiste, uno stimatore asintotico dalla sola prima uscita in modo tale che l'errore di stima dello stimatore sia sempre combinazione lineare dei modi

$$\delta(t), \left(\frac{1}{2}\right)^t, \binom{t}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}.$$

iii) Per $a = 0$ si dica se esiste uno stimatore dead-beat che agisce solo sulla seconda uscita e in caso affermativo se ne costruisca uno che attribuisca alla risultante matrice del sistema retroazionato indice di nilpotenza minimo possibile.

Esercizio 2. Si consideri il modello di stato a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) &&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-a^2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) &&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$ e operando nel dominio delle trasformate di Laplace, l'espressione dell'evoluzione forzata dello stato al generico istante $t \in \mathbb{R}_+$ in corrispondenza al segnale di ingresso $u(t) = e^t \delta_{-1}(t)$;

ii) si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, raggiungibilità ed osservabilità del sistema.

iii) Per $a = 1$ si progetti un controllore in retroazione dallo stato in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia BIBO stabile e la funzione di trasferimento abbia un polo semplice.

Esercizio 3. Dato il sistema lineare discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ \mathbf{y}(t) &= H\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

con a parametro reale. Si determini per quale valore di a il sistema risponde al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta(t-1) + 2^{t-2}\delta_{-1}(t-2)$$

con un'uscita in evoluzione forzata che consta di un solo impulso unitario (i.e. $y_f(t) = \delta(t-k)$ per un qualche intero $k \in \mathbb{Z}_+$).

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si enunci e dimostri il teorema della forma canonica di controllo per sistemi raggiungibili ad un solo ingresso.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2.5 punti] La matrice del sistema ha due autovalori $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = 1 - a$. Tali autovalori sono distinti per $a \neq 1/2$, mentre per $a = 1/2$ sono tutti coincidenti e valgono $1/2$. Applichiamo il criterio PBH di osservabilità e andiamo a valutare il rango, in corrispondenza agli autovalori, della matrice

$$\begin{bmatrix} zI_3 - F \\ h_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} z-a & -1 & 0 \\ 0 & z-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

per l'osservabilità dalla prima uscita, e della matrice

$$\begin{bmatrix} zI_3 - F \\ h_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} z-a & -1 & 0 \\ 0 & z-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

per l'osservabilità dalla seconda uscita. È immediato rendersi conto del fatto che la prima matrice PBH di osservabilità perde sempre rango per $z = 1 - a$ e pertanto, indipendentemente dal valore di a, il sistema non è mai osservabile dalla prima uscita. Nel caso della seconda matrice, invece, si ha rango pieno se gli autovalori sono distinti, si ha rango minore di 3 se gli autovalori coincidono. Pertanto per $a \neq 1/2$ il sistema è osservabile, mentre per $a = 1/2$ il sistema non è osservabile e l'unico autovalore del sottosistema non osservabile (dove la matrice PBH perde rango) è $z = 1/2$ (che è pure l'unico autovalore della matrice F in tal caso).

ii) [4.5 punti] Per $a = 1/2$ la coppia (F, h_1), dove h_1 è la prima riga della matrice H, diventa

$$F = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \qquad h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e, come osservato al punto i), certamente tale coppia non è osservabile. Tuttavia è immediato verificare che la coppia (F, h_1) si trova in forma standard di osservabilità. Pertanto è possibile riconoscere nello scalare $1/2$ la matrice F_{22}. Ciò significa che il polinomio $z\left(z - \frac{1}{2}\right)^2$ è compatibile con la struttura della coppia (F, h_1), con ciò intendendo che esiste una matrice $L_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ tale che

$$\Delta_{F+L_1h_1}(z) = z\left(z - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Essendo la coppia (F, h_1) in forma standard di osservabilità, possiamo inzialmente selezionare i due soli parametri (a e b) esplicitamente coinvolti nell'espressione del polinomio $\Delta_{F+L_1h_1}(z)$, imponendo che il polinomio caratteristico di

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

coincida con $z\left(z - \frac{1}{2}\right)$. Si trova, quindi,

$$z^2 - (1 + a + b)z + \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) = z\left(z - \frac{1}{2}\right),$$

da cui segue $a = -\frac{1}{2}, b = 0$. Pertanto le matrici $F + L_1h_1$ il cui polinomio caratteristico coincide con $z\left(z - \frac{1}{2}\right)^2$ sono tutte e sole quelle del tipo

$$F + L_1h_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ c & c & 1/2 \end{bmatrix},$$

con $c \in \mathbb{R}$ parametro libero. Affinché lo stimatore presenti anche il modo $\binom{t}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}$ occorre e basta che la forma di Jordan di $F + L_1 h_1$ presenti un solo miniblocco, di dimensione 2, relativo all'autovalore 1/2 o, equivalentemente, che

$$\dim\left[\ker\left(\frac{1}{2}I_3 - (F + L_1 h_1)\right)\right] = 1.$$

Ciò si verifica se e solo se $c \neq 0$. Pertanto è sufficiente scegliere, ad esempio,

$$L_1 = [\,-\tfrac{1}{2} \quad 0 \quad 1\,]^T$$

per soddisfare le specifiche.

iii) [3 punti] Per $a = 0$ la coppia (F, h_2), dove h_2 è la seconda riga della matrice H, diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad h_2 = [\,1 \quad 0 \quad 1\,]$$

e, come osservato al punto i), tale coppia è osservabile. Pertanto lo stimatore dead-beat esiste. Ponendo

$$L_2^T = [a\ b\ c]$$

e imponendo che il polinomio caratteristico della matrice

$$F + L_2 h_2 = \begin{bmatrix} a & 1 & a \\ b & 0 & b \\ c & 0 & 1 + c \end{bmatrix}$$

sia z^3 si ottiene:

$$L_2^T = [0\ 0\ -1].$$

Essendo l'unico stimatore dead-beat possibile è anche il minimo possibile ed esso attribuisce alla matrice $F + L_2 h_2$ indice di nilpotenza 3.

Esercizio 2. i) [5 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso è $U(s) = \frac{1}{s-1}$. L'espressione della trasformata di Laplace dello stato in evoluzione forzata è data da

$$\begin{aligned} X_f(s) &= (sI_3 - F)^{-1} g U(s) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s - 1 + a^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \frac{1}{s-1} \\ &= \frac{1}{s(s-1+a^2)} \begin{bmatrix} a \\ as \end{bmatrix} \frac{1}{s-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{s(s-1)(s-1+a^2)} \\ \dfrac{a}{(s-1)(s-1+a^2)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per $a = 0$ chiaramente $X_f(s) = 0$ e quindi $x_f(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}_+$. Vediamo, allora, cosa succede per $a \neq 0$.

Per quanto concerne la funzione razionale $\dfrac{a}{(s-1)(s-1+a^2)}$, essendo $a \neq 0$, i suoi due poli saranno sempre distinti e si avrà, quindi, sempre la seguente decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{a}{(s-1)(s-1+a^2)} = \frac{1}{a}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{a}\frac{1}{s-1+a^2},$$

che porta a

$$x_{f,2}(t) = \frac{1}{a}\left[e^t - e^{(1-a^2)t}\right]\delta_{-1}(t).$$

Per quanto concerne la prima funzione, invece, distinguiamo tre casi:

- $a = 1$;

- $a = -1$;
- $a \neq \pm 1$.

Nei primi due casi la funzione

$$\frac{a}{s(s-1)(s-1+a^2)}$$

presenta un polo doppio nell'origine (e un polo in 1), nel terzo caso, invece presenta tre poli distinti. Pertanto per $a = \pm 1$ si trova

$$\pm \frac{1}{s^2(s-1)} = \pm \left[-\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1} \right]$$

a cui corrisponde

$$x_{f,1}(t) = \pm \left[-1 - t + e^t \right] \delta_{-1}(t).$$

Per $a \neq \pm 1$, invece, la decomposizione in fratti semplici porta a

$$\frac{a}{s(s-1)(s-1+a^2)} = \frac{a}{1-a^2} \frac{1}{s} + \frac{1}{a} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{a(a^2-1)} \frac{1}{s-1+a^2}$$

che corrisponde a

$$x_{f,1}(t) = \left[\frac{a}{1-a^2} + \frac{1}{a} e^t + \frac{1}{a(a^2-1)} e^{(1-a^2)t} \right] \delta_{-1}(t).$$

ii) [2 punti] La matrice di raggiungibilità è

$$\mathcal{R} = [\, g \quad Fg \,] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & (1-a^2)a \end{bmatrix}$$

e il suo determinante vale

$$\det \mathcal{R} = -a^2.$$

Pertanto il sistema è raggiungibile se e solo se $a \neq 0$. Per quanto concerne l'osservabilità, invece, si trova

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2-a^2 \end{bmatrix}$$

e il suo determinante vale

$$\det \mathcal{O} = 2 - a^2.$$

Pertanto il sistema è osservabile se e solo se $a \neq \pm\sqrt{2}$.

iii) [3 punti] Osserviamo preliminarmente che, in base al punto ii), il sistema è raggiungibile per $a = 1$ e pertanto, scegliendo opportunamente la matrice di retroazione $K = [\, k_0 \quad k_1 \,]$, possiamo attribuire alla matrice $F + gK$ del sistema retroazionato un arbitrario polinomio caratteristico. La funzione di trasferimento del sistema di partenza è

$$w(s) = H(sI_2 - F)^{-1} g = \frac{s+1}{s^2},$$

e dalla teoria sappiamo che, visto che la coppia (F, g) è in forma canonica di controllo, possiamo attribuire al sistema retroazionato la funzione di trasferimento

$$w_K(s) = H(sI_2 - F - gK)^{-1} g = \frac{s+1}{\Delta_{F+gK}(s)} = \frac{s+1}{s^2 - k_1 s - k_0}.$$

Affinchè, dunque, il risultante sistema retroazionato sia BIBO stabile e la $w_K(s)$ abbia un solo polo semplice, occorre e basta scegliere K in modo tale che

$$\Delta_{F+gK}(s) = s^2 - k_1 s - k_0 = (s+1)(s+\lambda)$$

con λ numero reale positivo. Scegliendo, ad esempio, $\lambda = 1$ si trova

$$s^2 - k_1 s - k_0 = (s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

che porta a

$$K = [\,-1 \quad -2\,]\,.$$

Esercizio 3. [4 punti] La trasformata zeta dell'ingresso è pari a

$$U(z) = z^{-1} + z^{-2} \cdot \frac{z}{z-2} = \frac{z-1}{z(z-2)}.$$

La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = H(zI_2 - F)^{-1} g = \frac{z+a}{z(z-1)}.$$

Pertanto la trasformata zeta dell'uscita in evoluzione forzata è data da

$$Y_f(z) = W(z)U(z) = \frac{z+a}{z(z-1)} \cdot \frac{z-1}{z(z-2)} = \frac{z+a}{z^2(z-2)}.$$

Chiaramente l'uscita $y_f(t)$ è un singolo impulso unitario collocato in k se solo se

$$Y_f(z) = \frac{1}{z^k}.$$

Pertanto ciò si verifica se e solo se $a = -2$ (nel qual caso $Y(z) = z^{-2}$ e $y_f(t) = \delta(t-2)$).

Teoria. [6 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Controllo in retroazione.