COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
20 Settembre 2006

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - a^2u(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$,

ii) si determini, se esiste, l'espressione della risposta di regime permanente del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \sin t\delta_{-1}(t)$$

ed alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = -1, \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = -3;$$

iii) si determini l'espressione dell'evoluzione forzata del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \left[3 - 2e^{-t}\right]\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$, del sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s-0.1)(10s+100)}{s(s^2+0.2s+1)(s+0.1)}.$$

ii) Si tracci il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, del sistema di funzione di trasferimento

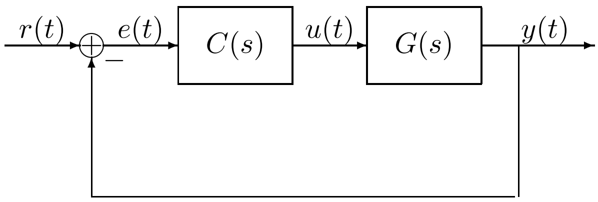
$$G(s) = 10\frac{s+0.1}{s(s-1)^2}.$$

e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+\frac{s}{4}}{s^2+5s+4}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore PD

$$C_{PD}(s) = K_p + K_d s \in \mathbb{R}[s]$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato

1) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) pari a 0.2;
2) abbia due poli stabili complessi coniugati in senso stretto (ovvero con parte immaginaria non nulla).

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita a tempo discreto

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(t-n+i) = \sum_{i=0}^{n} b_i u(t-n+i), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ e $(a_0, b_0) \neq (0,0)$, si determini la risposta impulsiva del sistema e se ne giustifichi l'espressione.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 2s^2 + 5s + a.$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & a \\ 1 & \dfrac{10-a}{2} & 0 \\ 0 & a & 0 \end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $10 - a > 0$ e $a > 0$, ovvero $0 < a < 10$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < a < 10$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - a^2}{s^3 + 2s^2 + 5s + a}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri: uno in a ed uno in $-a$, zeri che diventano coincidenti (e collocati in 0) per $a = 0$. Consideriamo prima il caso $a = 0$. Per tale valore del parametro a si trova

$$W(s) = \frac{s^2}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}.$$

Pertanto, per la regola dei segni di Cartesio, possiamo dire che il sistema è BIBO stabile.

Consideriamo ora il caso $a \neq 0$ e valutiamo per quali valori di a lo zero in a si semplifica con il polinomio al denominatore. Ciò si verifica se e solo se

$$d(a) = a^3 + 2a^2 + 5a + a = a(a^2 + 2a + 6) = 0,$$

ed avendo assunto $a \neq 0$ ciò si verifica se e solo se $a^2+2a+6 = 0$. Poichè questo polinomio di secondo grado nella variabile a ha tutti i coefficienti positivi, le sue radici sono a parte reale negativa, ma allora o sono complesse (e allora corrispondono a valori non compatibili con il fatto che a sia parametro reale) oppure sono reali e negative ma in tal caso portano alla cancellazione di uno zero "stabile" (e, di consequenza, non permettono di conseguire la stabilità BIBO senza aver già la stabilità asintotica).

Valutiamo, ora, per quali valori di a lo zero in $-a$ si semplifica con il polinomio al denominatore. Ciò si verifica se e solo se

$$d(-a) = -a^3 + 2a^2 - 5a + a = -a(a^2 - 2a + 4) = 0,$$

ed avendo assunto $a \neq 0$ ciò si verifica se e solo se $a^2 - 2a + 4 = 0$. In questo caso l'equazione di secondo grado ha due radici complesse coniugate e ciò significa che non si annulla per nessun valore reale di a, pertanto tale semplificazione non è mai possibile.

Ne consegue che il sistema è BIBO stabile se e solo se $0 \leq a < 10$.

ii) [4.5 punti] Per $a = 0$ il sistema viene descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2}.$$

Si tratta di un sistema non asintoticamente stabile, ma, in base all'analisi del precedente punto i), BIBO stabile. Per questa ragione esiste la risposta di regime permanente al segnale sinusoidale assegnato se e solo se l'evoluzione libera in corrispondenza alle specifiche condizioni iniziali assegnate risulta convergente a zero. Andiamo quindi a valutarla. I modi del sistema sono $1, e^{-t}\cos(2t), e^{-t}\sin(2t)$, e pertanto l'espressione della generica evoluzione libera d'uscita sarà

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2e^{-t}\cos(2t) + c_3e^{-t}\sin(2t).$$

Il calcolo delle derivate di ordine 1 e 2 della $y_\ell(t)$ porge:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_\ell}{dt} &= (2c_3 - c_2)e^{-t}\cos(2t) + (-c_3 - 2c_2)e^{-t}\sin(2t) \\
\frac{d^2y_\ell}{dt^2} &= (-4c_3 - 3c_2)e^{-t}\cos(2t) + (-3c_3 + 4c_2)e^{-t}\sin(2t).
\end{aligned}$$

Se ora imponiamo il soddisfacimento ddelle condizioni iniziali:

$$\begin{array}{rcccl}
1 = & y(0^-) & = & y_\ell(0^-) & = c_1 + c_2, \\
-1 = & \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = & \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = -c_2 + 2c_3, \\
-3 = & \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} & = & \left.\frac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} & = -3c_2 - 4c_3,
\end{array}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad c_3 = 0.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = e^{-t}\cos(2t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Esiste allora la risposta di regime permanente al segnale $u(t)$ ed essa assume la forma

$$y_{rp}(t) = |W(j)| \cdot \sin(t + \arg W(j)).$$

Si trova (per $a = 0$)

$$W(j) = \frac{j}{-1 + 2j + 5} = \frac{j}{4 + 2j}$$

e quindi

$$|W(j)| = \frac{1}{\sqrt{20}}, \qquad \arg W(j) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 1.107 \text{ rad.}$$

iii) [3.5 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso è

$$U(s) = \frac{3}{s} - \frac{2}{s+1} = \frac{s+3}{s(s+1)}$$

e quindi la trasformata di Laplace dell'uscita (forzata) è

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s}{s^2+2s+5}\frac{s+3}{s(s+1)} = \frac{s+3}{(s^2+2s+5)(s+1)}.$$

La decomposizione in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/2s+1/2}{(s+1)^2+2^2} = \frac{1/2}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{s-1}{(s+1)^2+2^2} \\ &= \frac{1/2}{s+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} - \frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right) \end{aligned}$$

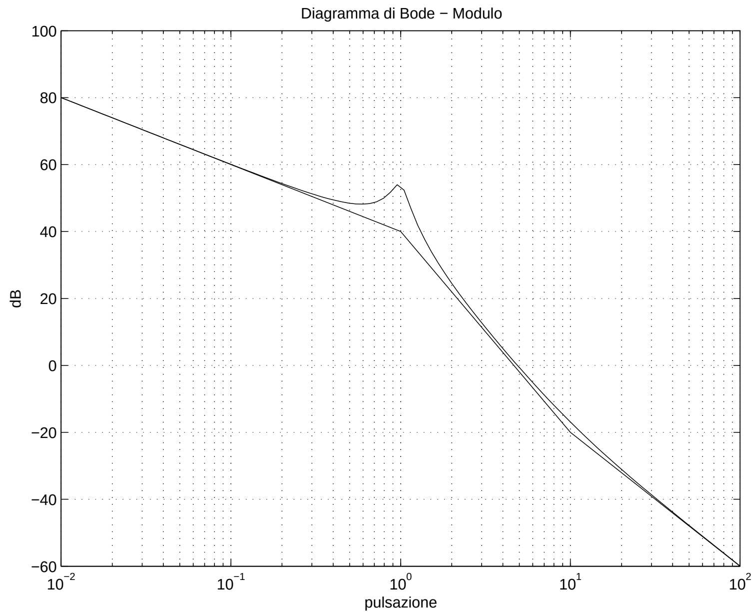
e ad essa corrisponde la funzione del tempo

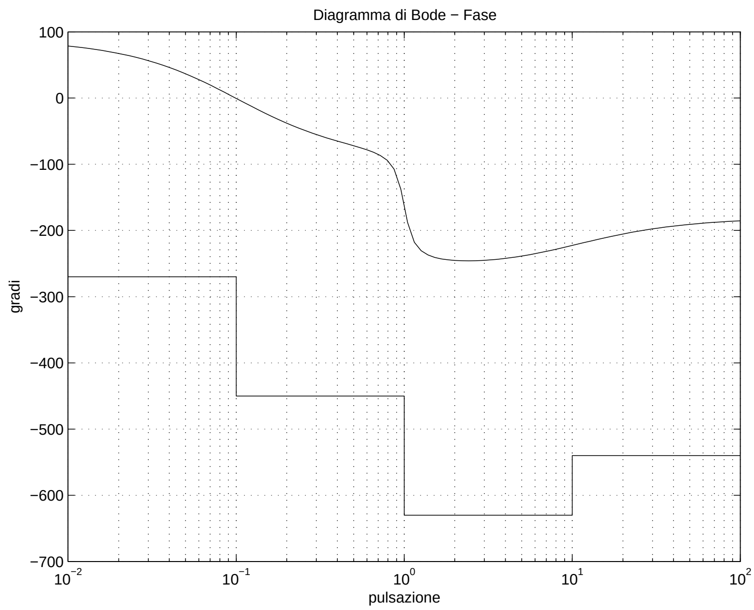
$$y_f(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)\right]\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = \frac{(s-0.1)(10s+100)}{s(s^2+0.2s+1)(s+0.1)} = -100\frac{(1-10s)(1+0.1s)}{s(s^2+0.2s+1)(1+10s)}.$$

Pertanto $K_B = -100$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale negativo con $1/T'_1 = 10$ e $\mu'_1 = 1$, uno zero reale positivo con $1/T'_2 = -0.1$ e $\mu'_2 = 1$, un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), un polo reale negativo con $1/T = 0.1$ e $\mu = 1$ e un termine trinomio al denominatore corrispondente a due poli complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento $\xi = 1/10 = 0.1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

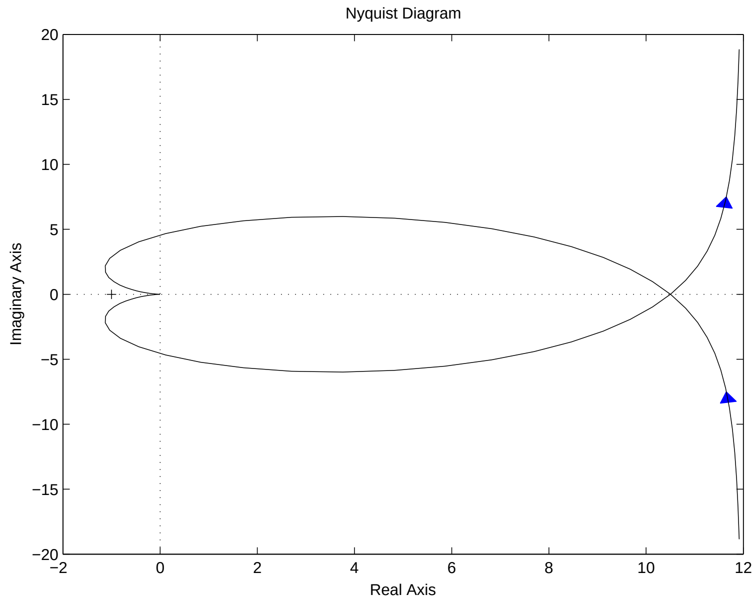




ii) [4.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza

$$G(j\omega) = \frac{10j\omega + 1}{j\omega(-1 + j\omega)^2}$$

è disegnato in figura:



$G(s)$ ha due poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 2$. Riportando il diagramma di Nyquist al finito, attraverso il percorso di Nyquist modificato, si trova $N = 0$; ne consegue che $n_{W+} = 2$ e pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha due poli a parte reale positiva.

Esercizio 3. [3.5 punti] Poichè $C_{PD}(s) = K_p\left(1 + \frac{K_d}{K_p}s\right)$, e la funzione di trasferimento in catena aperta $C_{PD}(s)G(s)$ non presenta poli nell'origine, il sistema retroazionato è di tipo 0 e l'espressione dell'errore di regime permanente al gradino unitario è data da

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(G)K_p}$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode di $G(s)$ (in questo caso di valore 1/4). Imponendo $e_{rp} \approx 0.2$ si trova

$$\frac{1}{1 + K_B(G)K_p} = \frac{1}{1 + \frac{K_p}{4}} \approx 0.2,$$

da cui segue $K_p \approx 16$. Assumiamo nel seguito $K_p = 16$. La funzione di trasferimento del sistema retroazionato diventa allora

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{C_{PD}(s)G(s)}{1 + C_{PD}(s)G(s)} = \frac{\left(\frac{s}{4} + 1\right)(16 + K_d s)}{s^2 + 5s + 4 + \left(\frac{s}{4} + 1\right)(16 + K_d s)} \\ &= \frac{\left(\frac{s}{4} + 1\right)(16 + K_d s)}{\left(1 + \frac{K_d}{4}\right)s^2 + (9 + K_d)s + 20}. \end{aligned}$$

Tale funzione di trasferimento presenta poli "stabili" (ovvero a parte reale negativa) se e solo se

$$\begin{cases} 1 + \frac{K_d}{4} > 0 \\ 9 + K_d > 0 \end{cases},$$

ovvero $-4 < K_d$. Inoltre tali poli sono complessi coniugati se e solo se il discriminante dell'equazione di secondo grado al denominatore è negativo, ovvero

$$(9 + K_d)^2 - 80\left(1 + \frac{K_d}{4}\right) < 0.$$

La precedente diseguaglianza si riscrive nella forma

$$0 > K_d^2 - 2K_d + 1 = (K_d - 1)^2$$

e pertanto non ha mai soluzione (al limite, per $K_d = 1$, otteniamo due poli reali coincidenti).

Teoria. [5.5 punti] Si veda il Capitolo 9 del libro di testo, pagina 231 e successive.