COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
5 Settembre 2006

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t)+gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad 1 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

i) Si determini, se esistono, i valori del parametro a per cui il sistema assegnato è un filtro FIR, ovvero presenta risposta impulsiva finita.

ii) Al variare di a in $\mathbb{R}$, si calcolino esplicitamente i sottospazi di controllabilità in k passi per ogni $k \in \mathbb{N}$.

iii) Si determini per quali valori di a il sistema ammette un controllore dead-beat, e

iv) per tali valori si determini, per ciascun valore di a, un possibile controllore dead-beat.

Esercizio 2. Si consideri il modello di stato a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t)+Gu(t) = \begin{bmatrix} a^2-1 & 0 \\ 1 & 2a-1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

con a parametro reale.

i) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la forma di Jordan della matrice F e si studino stabilità semplice, asintotica e BIBO del sistema;

ii) si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, raggiungibilità ed osservabilità del sistema.

Esercizio 3. Dato il sistema lineare discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= H\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \qquad t \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

i) si dica se esiste uno stimatore dead-beat che agisce solo sulla seconda uscita e in caso affermativo se ne costruisca uno che attribuisca alla risultante matrice del sistema retroazionato indice di nilpotenza minimo possibile;

ii) si dica se esiste uno stimatore dead-beat che agisce su entrambe le uscite e in caso affermativo se ne costruisca uno che attribuisca alla risultante matrice del sistema retroazionato indice di nilpotenza minimo possibile.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si dimostri che un sistema $\Sigma = (F, G, H)$, di dimensione n, è raggiungibile se e solo se la matrice $[\, zI_n - F \quad | \quad G\,]$ ha rango n per ogni $z \in \mathbb{C}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = -\frac{z-2a-1}{(z-1)(z-2)}$$

e per nessun valore di a essa presenta tutti i poli nell'origine.

ii) [4.5 punti] Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$X_1^R = \mathrm{Im} g = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Il sottospazio di raggiungibilità in due passi è

$$X_2^R = \mathrm{Im}\,[\,g \quad Fg\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2a-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Distinguiamo, quindi, due casi: per $a = 1/2$ le due colonne della matrice di raggiungibilità in due passi sono linearmente dipendenti e pertanto

$$X^R = X_2^R = X_1^R = \mathrm{Im} g = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Per $a \neq 1/2$, invece, le due colonne sono linearmente indipendenti e si trova

$$X_2^R = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Per $a \neq 1/2$ si trova, inoltre,

$$X^R = X_3^R = X_2^R.$$

Valutiamo, ora, i sottospazi di controllabilità. Il sottospazio di controllabilità in un passo è:

$$\begin{aligned} X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im} g\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 \\ ax_1 + 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 = -2(ax_1 + 2x_2) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : -4x_2 = (1+2a)\, x_1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{1+2a}{4} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+2a}{4} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \end{aligned}$$

Per quanto concerne il sottospazio di controllabilità in due passi, per $a = 1/2$ troviamo

$$\begin{aligned} X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,g \quad Fg\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 + 4x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\ &= = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_2 = -1/2 x_1 \right\} = X_1^C \subset \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

e quindi $X^C = X_1^C$ e il sistema non è controllabile a zero. Per $a \neq 1/2$, invece,

$$\begin{aligned} X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,g \quad Fg\,]\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 \\ 3ax_1 + 4x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\ &= \mathbf{R}^3 \\ X_3^C &= X_2^C. \end{aligned}$$

iii) [1.5 punti] Dal precedente risultato emerge subito che il sistema (che non è mai raggiungibile) è controllabile a zero in due passi per $a \neq 1/2$. Pertanto esiste un dead-beat controller se e solo se $a \neq 1/2$.

iv) [3.5 punti] Per $a \neq 1/2$ il sistema è in forma standard di raggiungibilità. Posto $K = [\,k_0 \quad k_1 \quad k_2\,]$, affinchè $F + gK$ sia nilpotente è sufficiente imporre

$$\det \begin{bmatrix} z - 1 - 2k_0 & -2k_1 \\ -a + k_0 & z - 2 + k_1 \end{bmatrix} = z^2 - (3 + 2k_0 - k_1)z + 2 + 4k_0 - (1 + 2a)k_1 \equiv z^2.$$

Si trova allora $k_0 = -\frac{1+6a}{4a-2}$ e $k_1 = \frac{4}{1-2a}$, e quindi un possibile controllore è:

$$K = [\,-\tfrac{1+6a}{4a-2} \quad \tfrac{4}{1-2a} \quad 0\,].$$

Esercizio 2. i) [4 punti] Distinguiamo a seconda che i due autovalori della matrice F, $\lambda_1 = a^2 - 1$ e $\lambda_2 = 2a - 1$, siano distinti o coincidenti. Se $\lambda_1 = \lambda_2$, ovvero $a^2 - 1 = 2a - 1$, ovvero $a \in \{0, 2\}$, allora si trova per $a = 0$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e per $a = 2$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

In entrambi i casi è immediato rendersi conto del fatto che la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ è pari ad 1 e pertanto la forma di Jordan della matrice F presenta un solo miniblocco di dimensione 2 relativamente all'autovalore in esame

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Se, invece, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ovvero $a \neq 0, 2$, allora la matrice F è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} a^2 - 1 & 0 \\ 0 & 2a - 1 \end{bmatrix}.$$

Per quanto concerne lo studio della stabilità, è immediato rendersi conto del fatto che abbiamo stabilità asintotica se e solo se

$$a^2 - 1 < 0 \qquad 2a - 1 < 0,$$

ovvero

$$-1 < a < 1 \qquad a < 1/2,$$

e pertanto per $-1 < a < 1/2$. Sia per $a = -1$ che per $a = 1/2$ abbiamo un autovalore nullo e un autovalore negativo e quindi stabilità semplice. Per ogni altro valore di a il sistema è instabile.

Valutiamo ora la stabilità BIBO del sistema. Certamente per i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica si ha pure stabilità BIBO. Vediamo ora se esistono dei valori del parametro

a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$\begin{aligned} W(s) &= H(sI_2 - F)^{-1}g = [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} s - a^2 + 1 & 0 \\ -1 & s - (2a-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s - a^2 + 1}. \end{aligned}$$

È importante evidenziare come l'autovalore in $2a - 1$ venga sempre cancellato dalla funzione di trasferimento, in quanto autovalore del sottosistema non osservabile. Per tale ragione la stabilità BIBO del sistema dipende unicamente dall'autovalore $a^2 - 1$. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se $a^2 - 1 < 0$, ovvero $-1 < a < 1$.

ii) [2 punti] La matrice di raggiungibilità è

$$\mathcal{R} = [\,g \quad Fg\,] = \begin{bmatrix} 1 & a^2 - 1 \\ 1 & 2a \end{bmatrix}$$

e il suo determinante vale

$$\det \mathcal{R} = -a^2 + 2a + 1.$$

Tale polinomio ha come radici $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ Pertanto il sistema è raggiungibile se e solo se $a \neq 1 \pm \sqrt{2}$. Per quanto concerne l'osservabilità, invece, abbiamo già osservato che il sistema è in forma standard di osservabilità e pertanto non è mai osservabile.

Esercizio 3. i) [3.5 punti] La coppia (F, h_2), dove

$$h_2 = [\,0 \quad 1 \quad 1\,]$$

è osservabile, giacchè

$$\mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_2F \\ h_2F^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pertanto lo stimatore dead-beat esiste. Ponendo

$$L_2^T = [a\ b\ c]$$

e imponendo che il polinomio caratteristico della matrice

$$F + L_2h_2 = \begin{bmatrix} 0 & a & 1+a \\ 1 & b & b \\ 0 & c & 1+c \end{bmatrix}$$

sia z^3 si ottiene:

$$L_2^T = [-1/2 \ \ -1/2 \ \ -1/2].$$

Essendo l'unico stimatore dead-beat possibile è anche il minimo possibile ed esso attribuisce alla matrice $F + L_2h_2$ indice di nilpotenza 3.

ii) [3 punti] Chiaramente se il sistema era osservabile dalla sola seconda uscita, a maggior ragione lo sarà da entrambe le uscite. Se assumiamo

$$L = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

è immediato rendersi conto del fatto che

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & a+d & 1+d \\ 1 & b+e & e \\ 0 & c+f & 1+f \end{bmatrix}$$

e quindi le ultime due colonne della matrice $F + LH$ sono completamente arbitrarie. Si nota che $F + LH$ non può mai coincidere con la matrice nulla, mentre è immediato rendersi conto che scegliendo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

possiamo attribuire a $F + LH$ l'espressione

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a cui corrisponde indice di nilpotenza 2 che, pertanto, sarà il minimo possibile.

Teoria. [6 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.