COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
7 Aprile 2006

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1+\pi^2)\frac{dy(t)}{dt} = a\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (1-a)^2\frac{du(t)}{dt} + (1-a)u(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) per $a = 1$ si determini l'espressione della risposta impulsiva del sistema $w(t), t \in \mathbb{R}$;

iii) per $a = 0$ si determini un segnale d'ingresso limitato (se esiste) che produce un'uscita (in evoluzione forzata) illimitata.

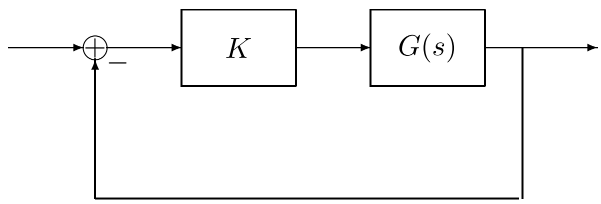
Esercizio 2. Sia

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2 + 0.2s + 10}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$.

Si supponga di applicare al sistema un controllo in retroazione (unitaria negativa) sulla cui catena di azione diretta agisca un controllore proporzionale K come illustrato in figura:

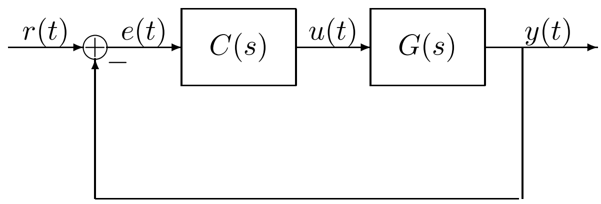


ii) Si studi al variare di K la stabilità BIBO del sistema retroazionato, evidenziando gli eventuali valori critici del parametro K, facendo uso della famiglia dei diagrammi di Nyquist di $KG(j\omega)$, $K \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Dato il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 + 0.1s}{(1+s)^2},$$

e supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti un controllore $C(s)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato

1) sia di tipo 0 con errore di regime permanente all'incirca $e^*_{rp} = 0.091$;

2) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega^*_A = 10$ rad/sec;

3) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa. Successivamente lo si commenti adeguatamente e se ne descrivano le possibili estensioni.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 2s^2 + (1+\pi^2)s = s[(s+1)^2 + \pi^2],$$

e pertanto presenta una radice nulla e due radici complesse coniugate a parte reale negativa collocate in $-1 \pm j\pi$. Di conseguenza il sistema non è mai asintoticamente stabile.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{as^2 + (1-a)^2 s + (1-a)}{s^3 + 2s^2 + (1+\pi^2)s}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al denominatore è (semplice e) collocato in 0, la situazione in cui ci sia BIBO stabilità pur non essendoci asintotica stabilità si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro a il polinomio al numeratore ha uno zero in 0. Gli altri zeri del denominatore sono collocati nel semipiano reale negativo e quindi non sono necessarie ulteriori verifiche. Osserviamo che il polinomio al numeratore si annulla in 0 se e solo se $a = 1$ e pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $a = 1$.

ii) [3 punti] Per $a = 1$ il sistema viene descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1+\pi^2)\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2},$$

a cui corrisponde la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s^2}{s^3 + 2s^2 + (1+\pi^2)s} = \frac{s}{s^2 + 2s + (1+\pi^2)}.$$

La decomposizione in fratti semplici di $W(s)$ porge

$$W(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + \pi^2} - \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{(s+1)^2 + \pi^2}$$

a cui corrisponde l'espressione della risposta impulsiva

$$w(t) = \left[e^{-t}\cos(\pi t) - \frac{1}{\pi}e^{-t}\sin(\pi t)\right]\delta_{-1}(t).$$

iii) [3 punti] Per $a = 0$ il sistema viene descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1+\pi^2)\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + u(t)$$

a cui corrisponde la seguente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+1}{s[s^2 + 2s + (1+\pi^2)]}.$$

Se applichiamo in ingresso un segnale $u(t)$ la cui trasformata sia una funzione razionale del tipo

$$U(s) = \frac{A}{s}$$

con A un numero reale (non nullo), è immediato rendersi conto del fatto che la corrispondente uscita avrà trasformata $Y(s)$ con un polo doppio nell'origine e pertanto sarà sicuramente divergente. Se prendiamo, ad esempio, $u(t) = \delta_{-1}(t)$ e quindi $U(s) = \frac{1}{s}$ otteniamo

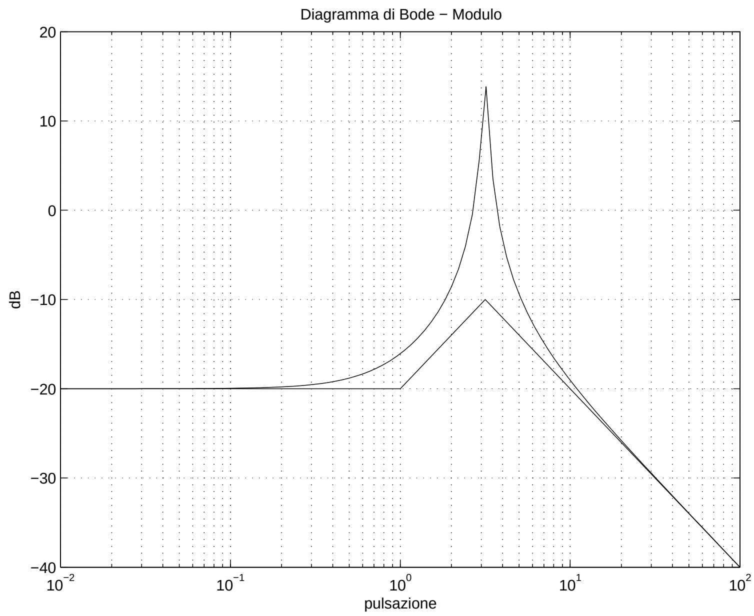
$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2[s^2 + 2s + (1+\pi^2)]}$$

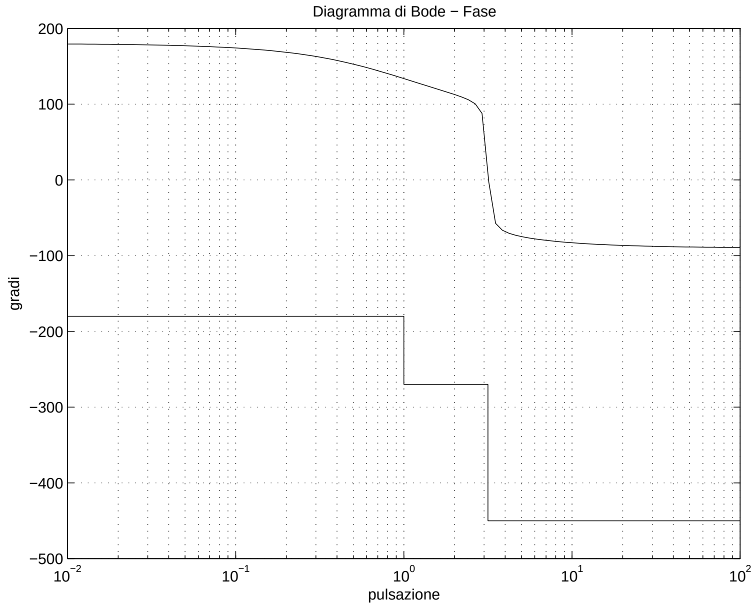
che certamente corrisponde ad un segnale di uscita divergente.

Esercizio 2. i) [3 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2 + 0.2s + 10} = -10^{-1} \cdot \frac{1-s}{1 + \frac{0.2}{\sqrt{10}}\frac{s}{\sqrt{10}} + \frac{s^2}{10}}.$$

Pertanto $K_B = -0.1$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale positivo con $1/T' = -1$ e $\mu' = 1$, un termine trinomio al denominatore corrispondente a due poli complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{10}$ e smorzamento $\xi = 1/(10 \cdot \sqrt{10})$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [7 punti] Per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist andiamo a valutare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento in catena aperta

$$KG(s) = K\ \frac{s-1}{s^2+0.2s+10}$$

per valori di K positivi e negativi. Da

$$KG(j\omega) = K\ \frac{-1+j\omega}{10-\omega^2+j0.2\omega} = \frac{K(-10+1.2\omega^2)+jK\omega(10.2-\omega^2)}{(10-\omega^2)^2+0.04\omega^2}$$

segue

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \frac{K(-10+1.2\omega^2)}{(10-\omega^2)^2+0.04\omega^2} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{K\omega(10.2-\omega^2)}{(10-\omega^2)^2+0.04\omega^2}.$$

Pertanto, posto $\bar\omega_1 := \sqrt{10/1.2} \approx 2.88$ e $\bar\omega_2 := \sqrt{10.2} \approx 3.19$, si ha per $K>0$ e $\omega \geq 0$:

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} <0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar\omega_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar\omega_1; \\ >0 & \text{per } \omega > \bar\omega_1, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} >0 & \text{per } 0 < \omega < \bar\omega_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar\omega_2; \\ <0 & \text{per } \omega > \bar\omega_2. \end{cases}$$

Invece, per $K<0$, si ha

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} >0 & \text{per } 0 \leq \omega < \bar\omega_1; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar\omega_1; \\ <0 & \text{per } \omega > \bar\omega_1, \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} <0 & \text{per } 0 < \omega < \bar\omega_2; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar\omega_2; \\ >0 & \text{per } \omega > \bar\omega_2. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_1$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = K \cdot 1.7321 = \begin{cases} > 0 & \text{se } K > 0; \\ < 0 & \text{se } K < 0. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}_2$

$$\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} = 5K = \begin{cases} > 0 & \text{se } K > 0; \\ < 0 & \text{se } K < 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} = 0.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\mathrm{Re}\{KG(j\omega)\}$ e $\mathrm{Im}\{KG(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= -\frac{K}{10} \\ \lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0^+ \\ \lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Re}\{KG(j\omega)\} &= 0^+ \\ \lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Im}\{KG(j\omega)\} &= 0^-. \end{aligned}$$

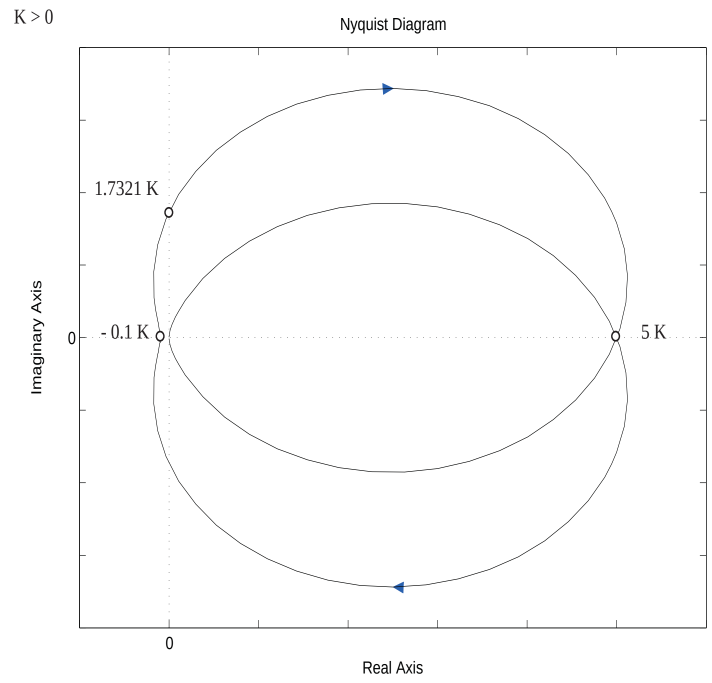
Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\begin{aligned} \arg KG(j\omega) &= \arg\left(K \; \frac{-1 + j\omega}{10 - \omega^2 + j0.2\omega}\right) \\ &= \arg(-0.1 \; K) + \arg(1 - j\omega) - \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{10} + j0.02\omega\right). \end{aligned}$$

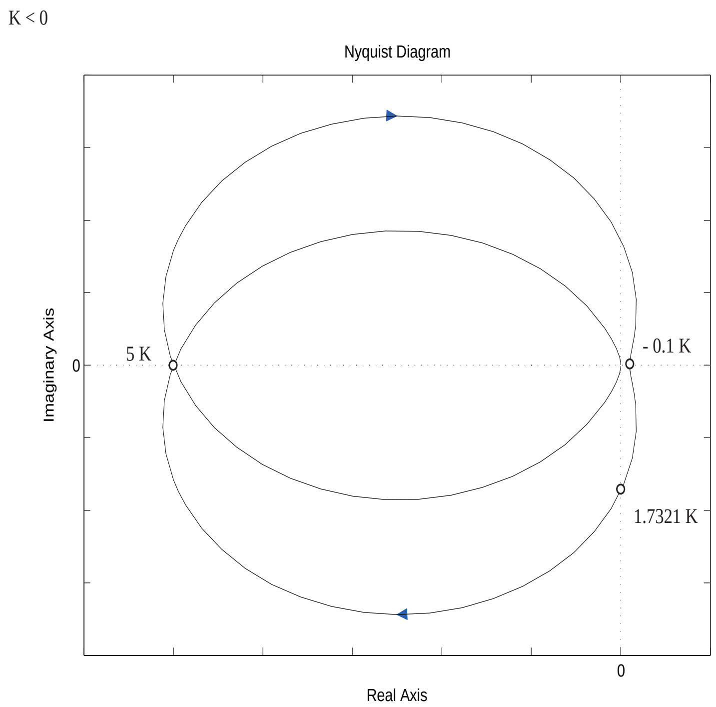
Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to 0^+} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} 180^o & \text{se } K > 0; \\ 0^o & \text{se } K < 0; \end{cases} \\ \lim_{\omega \to +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} -90^o & \text{se } K > 0; \\ 90^o & \text{se } K < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che il comportamento per $\omega < 0$ si trova per simmetria, rovesciando la porzione di diagramma relativa a pulsazione non negative, il diagramma di Nyquist di $KG(j\omega)$ risulta, pertanto, illustrato per $K > 0$ nella seguente figura



e per $K < 0$ nella seguente figura



Risulta allora evidente, dal primo diagramma, che

- per $-1 < -0.1K$ (ovvero $K < 10$), e chiaramente $K > 0$, $N = 0$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile;
- per $-1 > -0.1K$ (ovvero $K > 10$), $N = -1$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato è instabile;
- per $-1 = -0.1K$ (ovvero $K = 10$), si ha passaggio per il punto critico $-1 + j0$. Ciò ci permette di dire che $W(s)$ ha un polo nell'origine e pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile. Se adottiamo un percorso di Nyquist modificato, in modo da evitare il punto $-1 + j0$, ci rendiamo conto che $N = 0$ e quindi $W(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.

Nel caso del secondo diagramma, invece, è evidente che

- per $-1 < 5K$ (ovvero $K > -0.2$), e chiaramente $K < 0$, $N = 0$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile;
- per $-1 > 5K$ (ovvero $K < -0.2$), $N = -2$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato è instabile;
- per $-1 = 5K$ (ovvero $K = -0.2$), si ha passaggio per il punto critico $-1 + j0$. Ciò ci permette di dire che $W(s)$ ha due poli complessi coniugati a parte reale nulla e pertanto il sistema retroazionato è instabile. Se adottiamo un percorso di Nyquist modificato, in modo da evitare il punto $-1 + j0$, ci rendiamo conto che $N = 0$ e quindi $W(s)$ non presenta poli a parte reale positiva. Del resto in una rappresentazione irriducibile il denominatore di $W(s)$ ha grado due e pertanto non esistono altri poli a parte i due immaginari coniugati.

Esercizio 3. [5 punti] Poichè viene richiesto che il tipo del sistema sia 0 non è necessario introdurre poli nell'origine. Provvediamo allora, come prima cosa, ad attribuire al guadagno di Bode del controllore un valore che assicuri il rispetto del vincolo sull'errore di regime permanente. Poichè è noto che l'errore di regime permanente di un sistema di tipo 0 è espresso dalla formula

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)K_B(G)},$$

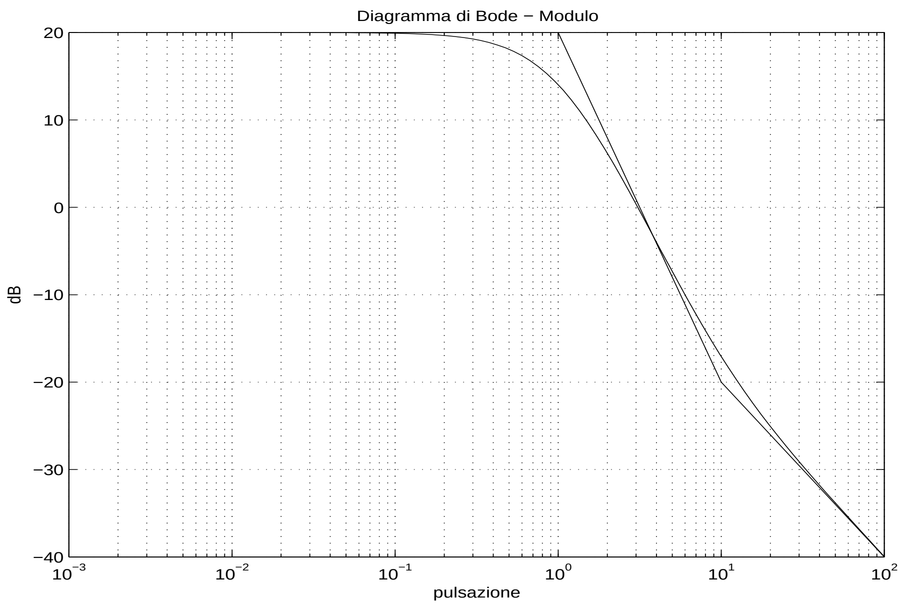
dove $K_B(C)$ e $K_B(G)$ rappresentano, rispettivamente, il guadagno di Bode del controllore e del processo, il vincolo su $K_B(C)$ diventa

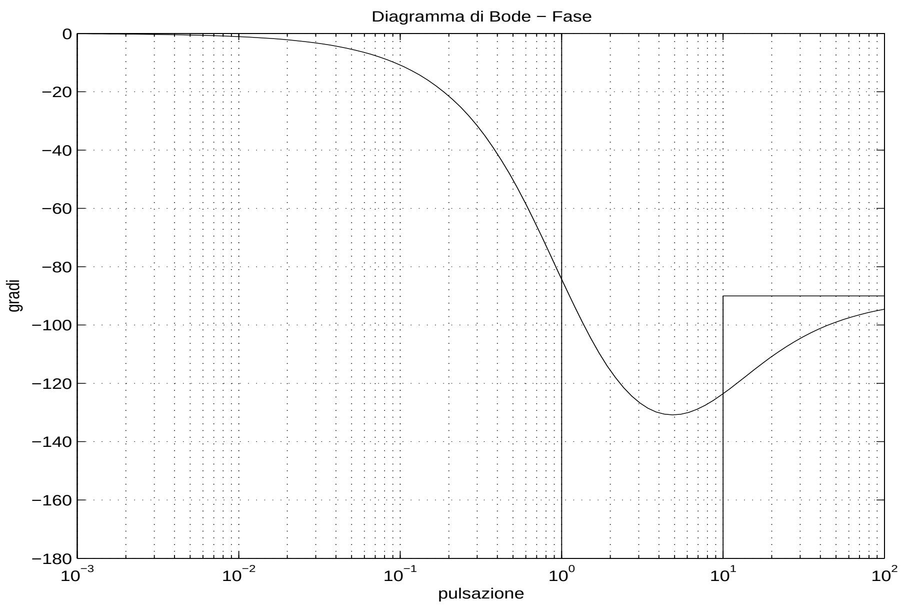
$$\frac{1}{1 + K_B(C)K_B(G)} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \leq 0.091.$$

Da ciò segue

$$1 + K_B(C) \geq 10.989,$$

ovvero $K_B(C) \geq 9.989$. Scegliamo allora, preliminarmente, $C(s) = K_B(C) = 10$ e andiamo a valutare pulsazione di attraversamento e margine di fase per la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s) = 10\,\frac{1+0.1s}{(1+s)^2}$. Graficamente si trova





ed è immediato rendersi conto del fatto che, essendo K_B espresso in dB pari a 20 ed essendo 1 il punto di spezzamento relativo al polo doppio, la pulsazione ω_A si trova a metà tra 10^0 e 10^1, ovvero in corrispondenza a $10^{1/2} \approx 3.16$ rad/sec, mentre il margine di fase in corrispondenza alla pulsazione $\omega_A^* = 1$ rad/sec è superiore a 90^o, giacchè in corrispondenza a $\omega = 1$ rad/sec la fase effettua la transizione da 0^o a -180^o assumendo il valore intermedio -90^o. Per compensare il fatto che $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) > m_\psi^* := 45^o$ potremmo utilizzare un'azione attenuatrice. Da un punto di vista intuitivo, però, possiamo pervenire al risultato desiderato semplicemente "cancellando" uno dei due poli in -1 e rimpiazzandolo con un polo collocato in -10. In questo modo, infatti, il diagramma asintotico dei moduli attraversa l'asse delle ascisse esattamente in corrispondenza alla pulsazione $\omega_A^* = 10$ rad/sec (e quindi la vera pulsazione di attraversamento è circa ω_A^*). Inoltre, il margine di fase per $\omega_A^* = 10$ rad/sec è molto maggiore di 45^o (è quasi 90^o).

Quanto descritto equivale ad introdurre un compensatore del seguente tipo:

$$C'(s) = \frac{1+s}{1+0.1s},$$

e pertanto il compensatore complessivo risulta

$$C(s) = K_B(C)C'(s) = 10\,\frac{1+s}{1+0.1s}.$$

Teoria. [6 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 160 e successive.