COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
18 Gennaio 2006

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (-a^2+a+3)\frac{dy(t)}{dt} + 3a(1-a)y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$

ii) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 0 \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 1.$$

iii) Si determini la risposta forzata del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta(t) + e^t\delta_{-1}(t).$$

iv) Si tracci il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = 1000\,\frac{(s+1)(s-10)}{(s+10)\,(s^2+50s+10000)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

ii) Si determini, se esiste, la risposta (forzata) di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = 2\delta_{-1}(t) - \cos(10^4 t)\,\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 2-\cos(10^4 t) & \text{per } t \geq 0; \\ 0 & \text{per } t < 0. \end{cases}$$

[Suggerimento: far uso delle informazioni (seppur approssimate) fornite dal diagramma di Bode].

Esercizio 3. Si consideri il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+0.1s}{(1+s)^2}.$$

Si progetti un controllore $C(s)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 0 con errore di regime permanente all'incirca $e^*_{rp} = 0.091$;

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega^*_A = 10$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discuta le possibili estensioni.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] Stabilità asintotica: usando la tabella di Routh si trova che c'è stabilità asintotica se e solo se $0 < a < 1$.

Stabilità BIBO: certamente per $0 < a < 1$. Cancellazioni tra il numeratore $s - 1$ e il denominatore hanno luogo se e solo se $a = 2$ oppure $a = -1$. In entrambi i casi, dopo la semplificazione, si trova

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

che è BIBO stabile. Pertanto c'è stabilità BIBO per $a \in (0, 1) \cup \{-1, 2\}$.

ii) [3 punti] Si trova

$$y_\ell(t) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t}.$$

iii) [3 punti] Si trova

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{s-1}{s(s+1)(s+3)} \cdot \frac{s}{s-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)},$$

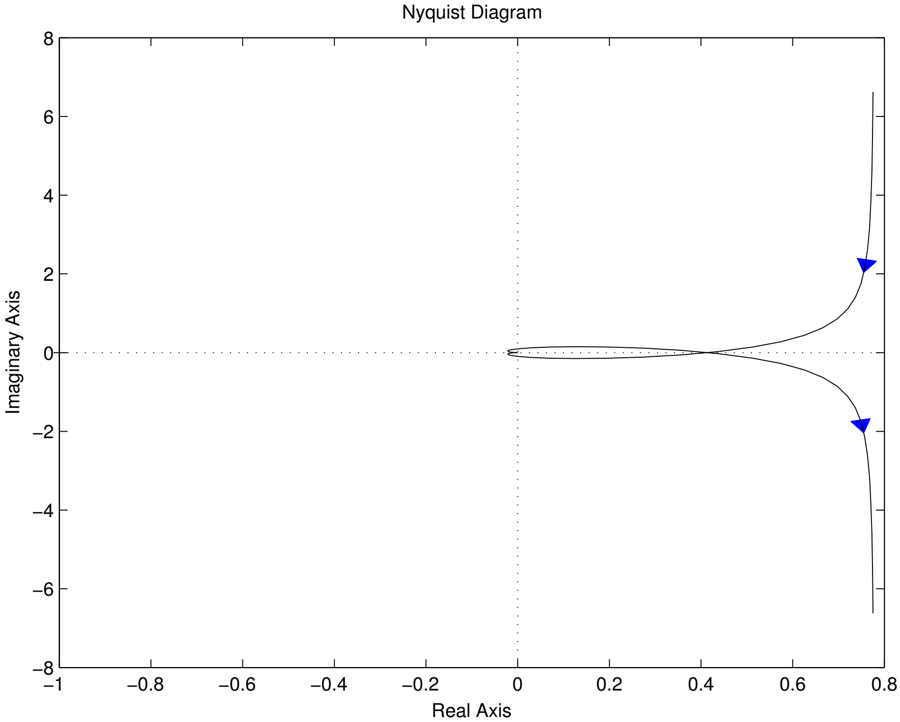
da cui

$$y_f(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right] \delta_{-1}(t).$$

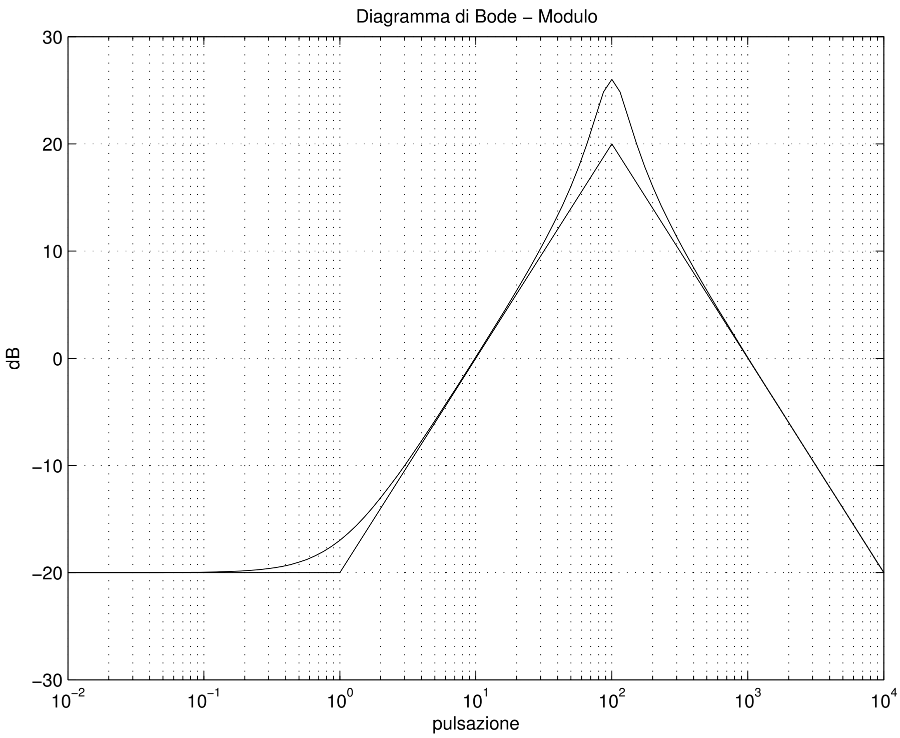
iv) [4.5 punti] Si trova

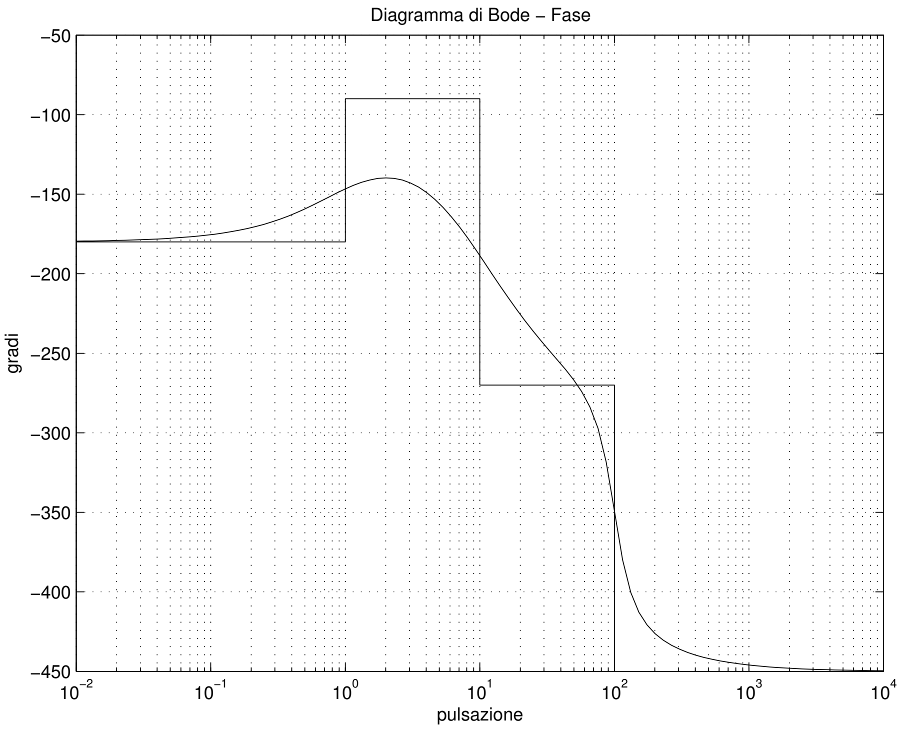
$$G(j\omega) = \frac{7 - \omega^2}{(1 + \omega^2)(9 + \omega^2)} + j\frac{3 - 5\omega^2}{\omega(1 + \omega^2)(9 + \omega^2)}$$

che corrisponde al seguente diagramma, tracciato per $\omega \in \mathbb{R}$:



Esercizio 2. i) [4.5 punti] Si trova





ii) [3 punti] Il sistema è BIBO stabile pertanto esiste la risposta di regime permanente al segnale in questione. Dal diagramma di Bode si deduce subito che

$$\begin{aligned} |W(j0)| &= 0.1 \\ \arg W(j0) &= -180^\circ \\ |W(j10^4)| &= 0.1 \\ \arg W(j10^4) &= -450^\circ \ = -90^\circ \end{aligned}$$

Da ciò segue

$$y_{rp}(t) = -0.2 - 0.1\cos(10^4 t - \pi/2) = -0.2 - 0.1\sin(10^4 t).$$

Esercizio 3. i) [3.5 punti] Preliminarmente si sceglie $C(s) = 10$. successivamente si trova che è necessario introdurre una rete anticipatrice $C_{\mathrm{ant}}(s) = \frac{1+s}{1+0.1s}$. In questo modo si perviene facilmente al risultato deisderato.

Teoria. [5 punti].