

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

23 Giugno 2006

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 100 \frac{(s-1)}{s(s^2 + 5s + 100)}.$$

- i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.
- ii) Si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e
- iii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$ e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 2. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{1 + 10s}{(1 + s)(1 + 0.1s)},$$

si progettino un controllore di tipo PI, e quindi di funzione di trasferimento

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s},$$

in modo tale che

- 1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa lineare) non superiore a $e_{rp}^* = 0.1$;
- 2) la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 1000$ rad/sec e
- 3) abbia margine di fase pari almeno a 45° .

Esercizio 3. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (-a^2 + a + 3) \frac{dy(t)}{dt} + 3a(1 - a)y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$

- ii) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0 \quad \frac{dy(0^-)}{dt} = -1 \quad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 0.$$

- iii) Si determini la risposta forzata del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta(t) - e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

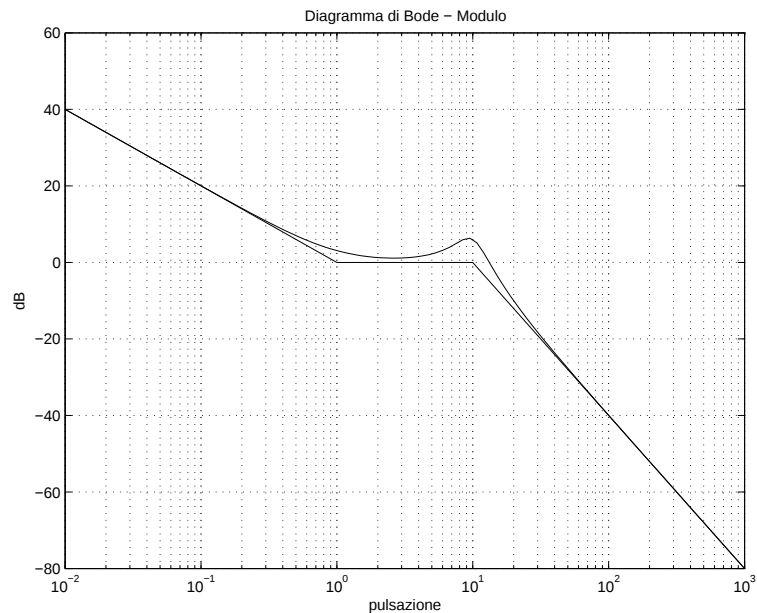
Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

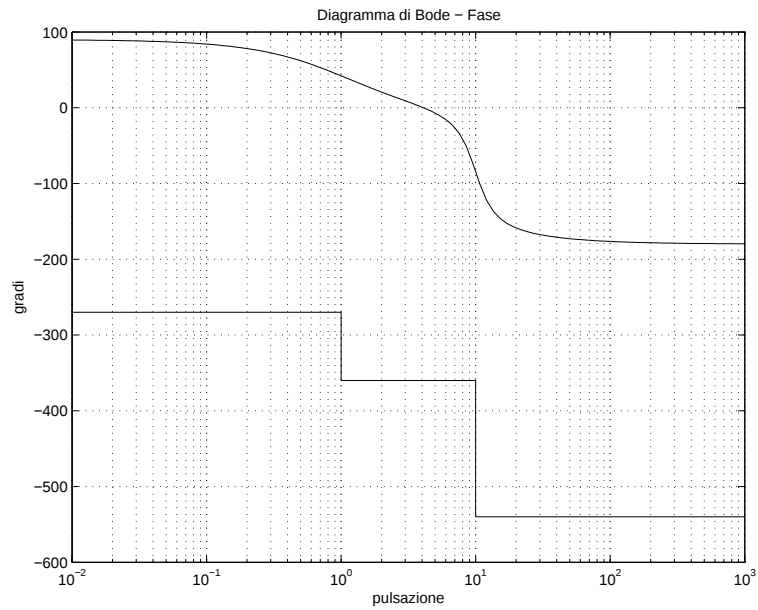
SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

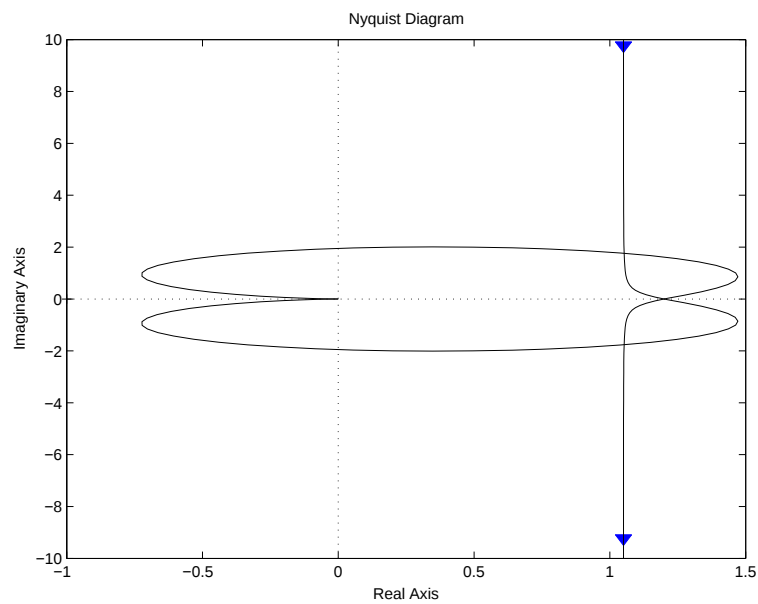
$$G(s) = 100 \frac{(s-1)}{s(s^2+5s+100)} = -1 \frac{1-s}{s\left(\frac{s^2}{10^2} + 2 \cdot 0.25 \frac{s}{10} + 1\right)}.$$

Pertanto $K_B = -1$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale positivo con $1/T' = -1$ e $\mu' = 1$, un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$) ed una coppia di poli complessi coniugati con $\omega_n = 10$ e $\xi = 0.25$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$). Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





iii) [4 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



iii) [3 punti] La chiusura al finito del diagramma, ricorrendo ad un percorso di Nyquist modificato. porta al tracciamento di un arco di 180° che va dal ramo basso al ramo alto, in verso orario. Pertanto il diagramma di Nyquist compie un giro in verso orario attorno a $-1+j0$, ovvero $N = -1$. Poichè $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$, la condizione $N = -1$ assicura $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo a parte reale positiva.

Esercizio 2. [4 punti] Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo nell'origine.

Pertanto $K_i \neq 0$. Riscriviamo il controllore PI nella forma

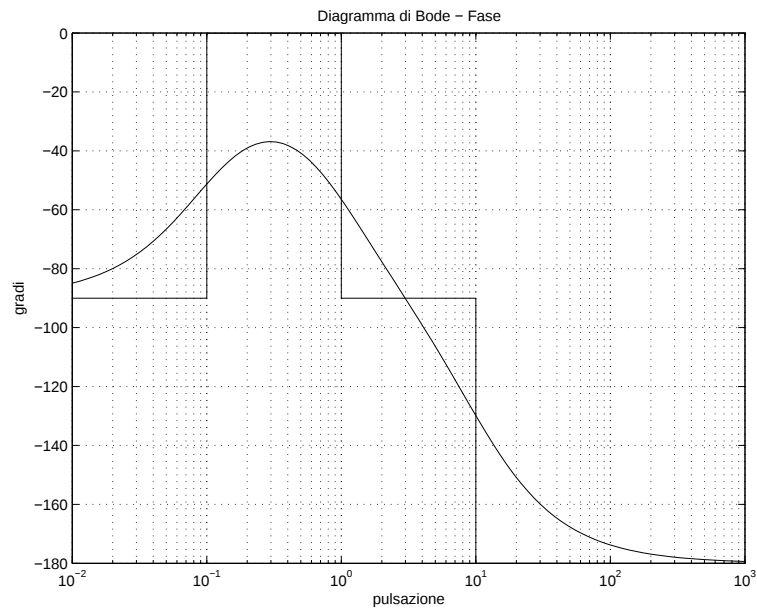
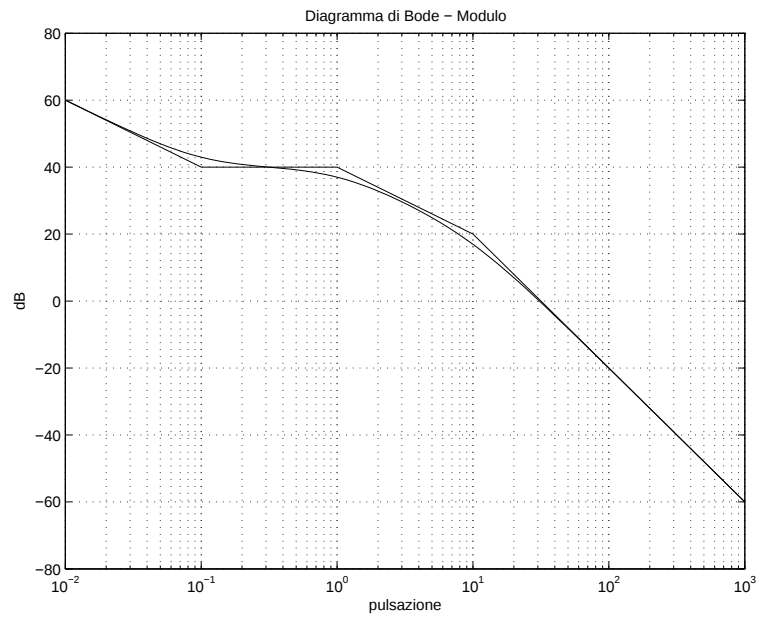
$$C(s) = K_i \frac{1 + \frac{K_p}{K_i} s}{s}.$$

Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{10 K_i} \leq 0.1$$

da cui segue $K_i \geq 1$. Prendiamo $K_i = 1$ a cui corrisponde $C'(s) = \frac{1}{s}$.

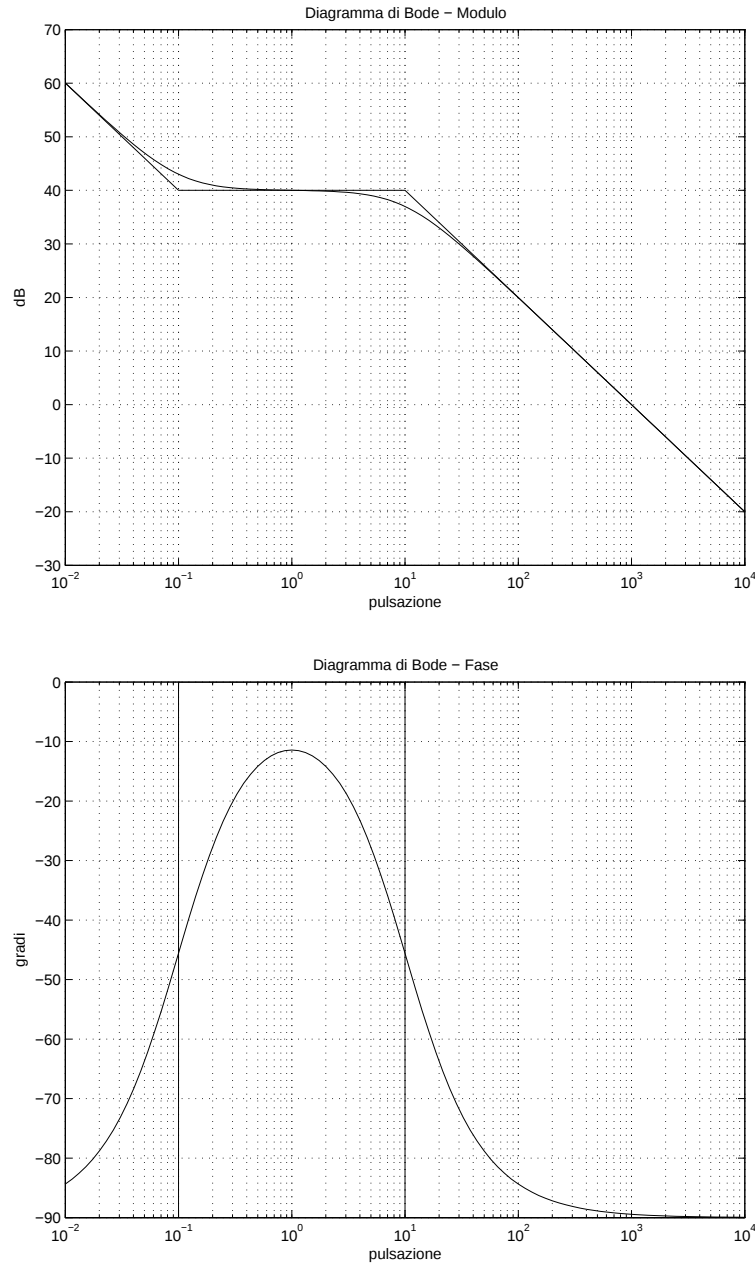
I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s) = 10 \frac{1+10s}{s(1+s)(1+0.1s)}$ sono i seguenti:



Si trova $10^{3/2} \text{ rad/s} = \omega_A < \omega_A^* = 1000 \text{ rad/s}$ e $m_\psi(\omega_A^*) := 180^\circ + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $0^\circ \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 45^\circ$. Per sollevare il diagramma delle ampiezze in modo che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 1000 \text{ rad/s}$ e incrementare la fase in ω_A^* di una quantità pari almeno a 45° abbiamo a disposizione un solo zero. Riusciamo ad ottenere entrambi i risultati a condizione di introdurre uno zero in -1 . Ciò corrisponde a scegliere il controllore PI

$$C(s) = \frac{1+s}{s} = 1 + \frac{1}{s},$$

che porta ai seguenti diagrammi di Bode per $C(s)G(s)$:



Esercizio 3. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 4s^2 + (3 + a - a^2)s + 3a(1 - a).$$

Possiamo valutare per quali valori di a essa ammetta solo radici a parte reale minore di 0 ricorrendo al criterio di Routh. La tabella di Routh corrispondente al polinomio $d(s) = s^3 + 4s^2 + (3 + a - a^2)s + 3a(1 - a)$ è:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 + a - a^2 \\ 2 & 4 & 3a - 3a^2 \\ 1 & \frac{12 + a - a^2}{4} & 0 \\ 0 & 3a(1 - a) & 0 \end{array}$$

Poichè i primi due elementi in prima colonna sono positivi, l'unica situazione corrispondente alla Hurwitzianità è quella in cui tutti gli elementi in prima colonna sono positivi. Ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} \frac{12+a-a^2}{4} > 0 \\ 3a(1-a) > 0 \end{cases}$$

La seconda condizione è verificata se e solo se $0 < a < 1$. D'altra parte $12 + a - a^2 = -(a-4)(a+3) = (4-a)(a+3)$, e pertanto assume valori positivi se e solo se $-3 < a < 4$. Mettendo assieme le due condizioni, si deduce che entrambi i termini risultano positivi se e solo se $0 < a < 1$. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < a < 1$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente per tutti i valori del parametro a per cui c'è stabilità asintotica c'è pure stabilità BIBO. Si tratta di vedere, allora, se esistono valori del parametro a in corrispondenza ai quali abbiamo stabilità BIBO senza avere la stabilità asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s - 1}{s^3 + 4s^2 + (3 + a - a^2)s + 3a(1 - a)}.$$

Poiché l'unico zero "instabile" del polinomio al numeratore è collocato in 1, la situazione ora descritta si può verificare se e solo se per qualche valore del parametro a il polinomio al denominatore ha uno zero in 1 e gli altri zeri sono collocati nel semipiano reale negativo. Osserviamo che il polinomio al denominatore si annulla in 1 se e solo se

$$\begin{aligned} 0 &= s^3 + 4s^2 + (3 + a - a^2)s + 3a(1 - a) \Big|_{s=1} = 1 + 4 + (3 + a - a^2) + 3a(1 - a) \\ &= 8 + 4a - 4a^2 = -4(a - 2)(a + 1), \end{aligned}$$

ovvero se e solo se $a = -1$ oppure $a = 2$. In entrambi i casi la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s-1}{s^3+4s^2+s-6} = \frac{s-1}{(s-1)(s^2+5s+6)} = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

e quindi ha due poli a parte reale negativa. Pertanto il sistema è BIBO stabile. In definitiva, il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in \{-1\} \cup]0, 1[\cup \{2\}$.

ii) [3 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 4s^2 + 3s = s(s+1)(s+3)$$

e, pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned} 0 &= y(0^-) = y_\ell(0^-) = c_1 + c_2 + c_3, \\ -1 &= \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = \left. \frac{dy_\ell(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = -c_2 - 3c_3, \\ 0 &= \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = \left. \frac{dy_\ell(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = c_2 + 9c_3, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = -4/3, c_2 = 3/2 \quad \text{e} \quad c_3 = -1/6.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = -\frac{4}{3} + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

iii) [3 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso è

$$U(s) = 1 - \frac{1}{s+1} = \frac{s}{s+1}$$

e quindi la trasformata di Laplace dell'uscita (forzata) è

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s-1}{s^3+4s^2+3s} \frac{s}{s+1} = \frac{s-1}{(s+3)(s+1)^2}.$$

La decomposizione in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$Y_f(s) = -\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

e ad essa corrisponde la funzione del tempo

$$y_f(t) = [-e^{-3t} + e^{-t} - te^{-t}]\delta_{-1}(t).$$

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 160 e successive.