SECONDO COMPITINO DI ANALISI DEI SISTEMI
18 Dicembre 2007 - A.A. 2007/2008

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, uno stimatore dalla sola seconda uscita in modo tale che la matrice $F+L_2h_2$ che regola la dinamica dell'errore di stima abbia polinomio caratteristico $(s+1)^3$.

ii) Si progetti, se possibile, uno stimatore dalla sola seconda uscita in modo tale che la dinamica dell'errore di stima presenti i soli modi e^{-t}, te^{-t}.

iii) Si progetti, se possibile, uno stimatore da entrambe le uscite in modo tale che per ogni $e(0)$, l'errore di stima evolva come $e(t) = e^{\lambda t}e(0)$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \geq 0$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la raggiungibilità e la controllabilità a zero del sistema.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$

ii) si progetti, se possibile, una successione di controllo di lunghezza k minima possibile che porti lo stato del sistema da $x(0) = x_0 = [\,1 \quad -1 \quad 0\,]^T$ a $x(k) = x_f = [\,0 \quad 1 \quad 0\,]^T$;

iii) si determini un controllore dead-beat che renda la matrice $F+gK$ del sistema retroazionato nilpotente con indice di nilpotenza minimo;

iv) si progetti, se possibile, una retroazione dallo stato che attribuisca al risultante sistema retroazionato i modi elementari $\delta(k), \delta(k-1)$ e 1.

<u>NOTA</u>: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si enunci e dimostri il Lemma di Heymann.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] Osserviamo che la coppia (F, h_2) non è osservabile giacché

$$\mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} h_2 \\ h_2 F \\ h_2 F^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ha rango 2. Lo spettro della matrice (triangolare) F è $\sigma(F) = (-1, 1, -1)$ e pertanto si tratta di verificare che 1 non sia autovalore del sottosistema non osservabile (la cui dimensione è 1). Attraverso il criterio PBH di osservabilità posso verificare che la matrice PBH di osservabilità non perde rango in corrispondenza a $s = 1$. Pertanto $F_{22} = -1$ ed esiste una matrice L_2 tale che $\Delta_{F+L_2h_2}(s) = (s+1)^3$. Posto

$$L_2 = [\,\ell_1 \quad \ell_2 \quad \ell_3\,]^T$$

la matrice $F + L_2h_2$ assume la seguente espressione

$$F + L_2 h_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1+\ell_1 & -1-\ell_1 \\ 0 & 1+\ell_2 & 1-\ell_2 \\ 0 & \ell_3 & -1-\ell_3 \end{bmatrix}.$$

Imponendo che il polinomio caratteristico del blocco

$$\begin{bmatrix} 1+\ell_2 & 1-\ell_2 \\ \ell_3 & -1-\ell_3 \end{bmatrix},$$

ovvero

$$s^2 + (\ell_3 - \ell_2)s + (-1 - \ell_2 - 2\ell_3)$$

coincida con $(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1$, si trova

$$\ell_2 = -2, \qquad \ell_3 = 0,$$

da cui

$$L_2 = [\,\ell_1 \quad -2 \quad 0\,]^T$$

con ℓ_1 arbitrario in $\mathbb{R}$.

ii) [3.5 punti] Per quanto detto prima, il sottosistema non osservabile ha un unico autovalore posizionato in -1, compatibile con la richiesta sullo stimatore. Si tratta di scegliere la matrice L_2 dello stimatore, se possibile, in modo tale che la matrice $F + L_2h_2$ abbia polinomio minimo $\psi_{F+L_2h_2}(s) = (s+1)^2$. Tale polinomio minimo è compatibile con il solo polinomio caratteristico $\Delta_{F+L_2h_2}(s) = (s+1)^3$ e quindi possiamo ricorrere alla soluzione determinata al punto precedente e andare a selezionare, se possibile, il solo parametro ℓ_1 in modo che il polinomio minimo di $F + L_2h_2$ sia $(s+1)^2$ o, equivalentemente, la molteplicità geometrica di -1 come autovalore di $F + L_2 h_2$ sia 2, ovvero, il rango di $(F + L_2 h_2) - (-1 I_3) = F + L_2 h_2 + I_3$ sia 1. Per $L_2 = [\,\ell_1 \quad -2 \quad 0\,]^T$, si ha

$$F + L_2 h_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1+\ell_1 & -1-\ell_1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

da cui

$$F + L_2 h_2 + I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1+\ell_1 & -1-\ell_1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango 1 se e solo se $\ell_1 = -1$. Di conseguenza $L_2 = [\,-1 \quad -2 \quad 0\,]^T$.

iii) [3.5 punti] La condizione in esame equivale a chiedere che tutti vettori $e(0)$ siano autovettori di $F+LH$ relativi all'autovalore λ. Ciò, a sua volta, è possibile se e solo se $F+LH = \lambda I_3$. Ora la coppia (F, H) non è osservabile, ma anche in questo caso la matrice del sottosistema non osservabile è $F_{22} = -1$. Pertanto se tale λ esiste non può che essere -1. Certamente posso attribuire a $F + LH$ il polinomio caratteristico $(s + 1)^3$, unico polinomio caratteristico compatibile con la precedente richiesta. Se scrivo L in forma parametrica

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

ottengo

$$F + LH = \begin{bmatrix} -1 & 1+a_1+a_2 & -1-a_2 \\ 0 & 1+b_1+b_2 & 1-b_2 \\ 0 & c_1+c_2 & -1-c_2 \end{bmatrix},$$

da cui risulta evidente che le ultime due colonne della matrice $F + LH$ possono essere scelte in modo completamente arbitrario. Imponendo allora

$$F + LH = \begin{bmatrix} -1 & 1+a_1+a_2 & -1-a_2 \\ 0 & 1+b_1+b_2 & 1-b_2 \\ 0 & c_1+c_2 & -1-c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. i) [2.5 punti] Valutiamo prima la raggiungibilità. Si trova

$$\mathcal{R} = [\,g \quad Fg \quad F^2 g\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui risulta evidente che la matrice non ha mai rango pieno e pertanto il sistema non è mai raggiungibile. Per quanto concerne la controllabilità a zero si tratta di verificare la condizione

$$\mathrm{Im}(F^3) \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{R} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle.$$

Si trova che

$$F^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

dove il simbolo $*$ indica un elemento generico di cui non è necessario il calcolo. È chiaro, allora, che condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mathrm{Im}(F^3) \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{R}$ è che $a^3 = 0$ ovvero $a = 0$. Pertanto il sistema (che non è mai raggiungibile) è controllabile a zero se e solo se $a = 0$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 0$ la coppia (F, g) diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e in base all'analisi condotta al punto i) sappiamo che tale coppia non è raggiungibile ma è controllabile a zero. Poichè il sistema non è raggiungibile non sappiamo a priori se e in quanti passi possiamo realizzare questa azione di controllo. È immediato rendersi conto del fatto che

$$\begin{aligned} X_1^R &= \mathrm{Im} g = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\ X_k^R &= \mathrm{Im}\,[\,g \quad Fg\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle, \qquad \forall\, k \geq 2, \end{aligned}$$

e quindi il controllo esiste per $k = 1$ se e solo se

$$x_f - Fx_0 \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

e per $k \geq 2$ se e solo se

$$x_f - F^k x_0 \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle.$$

Ora, per $k = 1$

$$x_f - Fx_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle,$$

e quindi il problema non ha soluzione. Per $k = 2$

$$x_f - F^2 x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e tale vettore appartiene a X_2^R. Pertando il problema è risolubile in $k = 2$ passi. Imponendo

$$x_f - F^2 x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

si trova la soluzione

$$u(0) = -u(1) = 3/2.$$

iii) [4 punti] Per $a = 0$ la coppia (F, g) è controllabile a zero. Questo ci assicura automaticamente l'esistenza di un controllore dead-beat. Se introduciamo la matrice $K = [\, a \quad b \quad c \,]$ in forma parametrica, otteniamo

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1+a & 1+b & 2+c \\ a & b & 1+c \end{bmatrix}.$$

Poiché tale matrice ha una struttura triangolare a blocchi, ne deduco che il suo polinomio caratteristico è il prodotto del fattore z per il polinomio caratteristico della matrice

$$\begin{bmatrix} 1+b & 2+c \\ b & 1+c \end{bmatrix},$$

ovvero $z \cdot [z^2 - (2+b+c)z + (1-b+c)]$, e quindi non dipende dal parametro a. Imponendo che tale polinomio coincida con z^3 si trova $b = -1/2$ e $c = -3/2$. Pertanto i controllori dead-beat sono tutti e soli quelli nella forma

$$K = [\, a \quad -1/2 \quad -3/2 \,]$$

al variare di a in $\mathbb{R}$. In corrispondenza al generico controllore dead-beat si trova

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1+a & 1/2 & 1/2 \\ a & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Chiaramente tale matrice non sarà mai la matrice nulla e quindi non è possibile attribuirle indice di nilpotenza 1. La matrice avrà indice di nilpotenza 2 se e solo se la molteplicità di 0 come autovalore del polinomio minimo sarà 2 e ciò è possibile, in questo contesto, se e solo se la molteplicità geometrica di 0 come autovalore di $F + GK$ sarà 2. Ciò equivale a chiedere che il rango di $F + GK - 0I_3 = F + GK$ sia 1. Tale condizione è verificata se e solo se $a = -(-1 + a)$ ovvero se e solo se $a = 1/2$. In tutti gli altri casi l'indice di nilpotenza sarà 3. Pertanto il controllore dead-beat che attribuisce a $F + GK$ indice di nilpotenza minimo (pari a 2) sarà

$$K = [\, 1/2 \quad -1/2 \quad -3/2 \,].$$

iv) [4 punti] Imporre che la matrice $F+GK$ abbia unicamente i modi $\delta(k), \delta(k-1)$ e 1 equivale ad imporre che il polinomio minimo della matrice $F+GK$ sia $\psi_{F+GK}(z) = z^2(z-1)$. Questo polinomio minimo è compatibile solo con il polinomio caratteristico $\Delta_{F+GK}(z) = z^2(z-1)$. Poiché il sistema è controllabile a zero e la dimensione del sottosistema non raggiungibile è 1, ne consegue che $F_{22} = 0_{1\times 1}$. Pertanto esiste un controllo in retroazione che impone alla matrice $F+GK$ il polinomio caratteristico $\Delta_{F+GK}(z) = z^2(z-1)$. Sfruttando la parametrizzazione ottenuta al punto precedente, imponiamo ai parametri b e c del controllore due valori tali per cui $z^2 - (2+b+c)z + (1-b+c) = z(z-1) = z^2 - z$. Si ottiene in tal modo $b = 0$ e $c = -1$. In corrispondenza a tali valori di b e c si trova

$$F+GK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1+a & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Chiaramente tale matrice avrà polinomio minimo $\psi_{F+GK}(z) = z^2(z-1)$ se e solo se la molteplicità di 0 come autovalore del polinomio minimo sarà 2 e ciò è possibile, in questo contesto, se e solo se la molteplicità geometrica di 0 come autovalore di $F+GK$ sarà 1. Ciò equivale a chiedere che il rango di $F+GK-0I_3 = F+GK$ sia 2. Tale condizione è verificata per ogni valore di a diverso da zero. Possiamo quindi assumere

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Teoria. [6 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Controllo in retroazione.