COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
6 Settembre 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s^2 - s + 100}{s(s+10)(s+0.1)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.
[Suggerimento: per valutare la presenza e la collocazione di eventuali punti di intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo si confrontino i diagramma di Bode di modulo e fase].

Esercizio 2. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 + 10s}{(1+s)(1+0.1s)},$$

i) si determini il tipo del sistema;

ii) si progetti un controllo in retroazione in modo tale che

   1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa unitaria) non superiore a $e^*_{rp} = 0.1$;
   2) la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega^*_A = 50$ rad/sec e
   3) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

Esercizio 3. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2a\frac{dy(t)}{dt} + (1-a)y(t) = \frac{du(t)}{dt} - 2u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema al variare di a in $\mathbb{R}$.

ii) Per $a = 1$, si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 0 \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = -2.$$

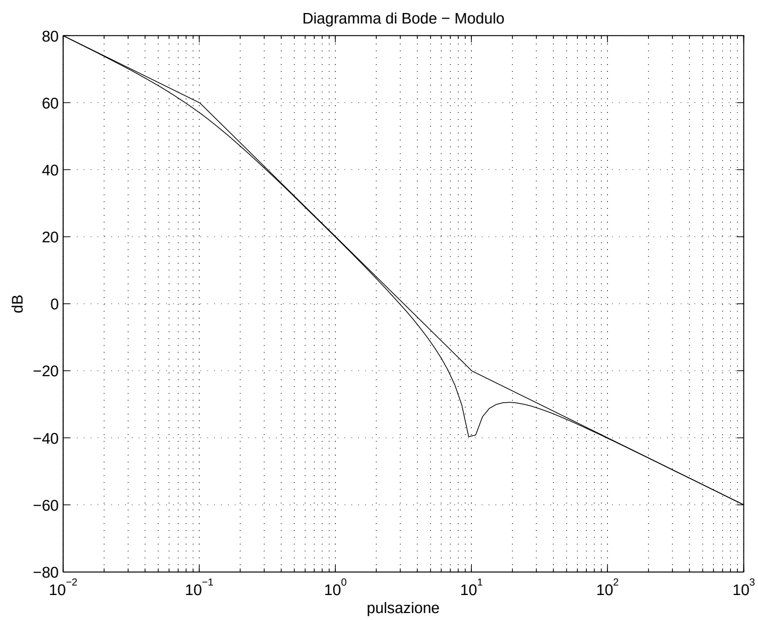
Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

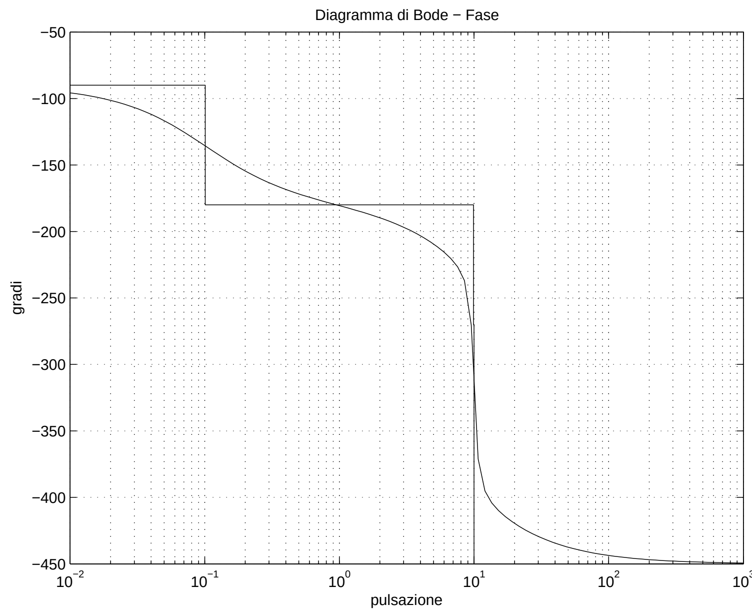
SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

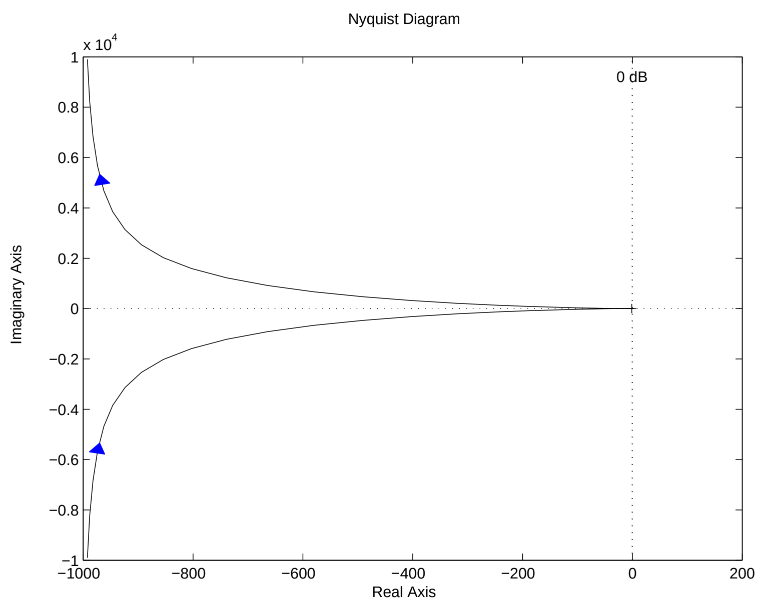
$$G(s) = 100\ \frac{\left(\frac{s^2}{10^2} - 2 \cdot 0.05 \frac{s}{10} + 1\right)}{s\left(1 + \frac{s}{10}\right)\left(1 + \frac{s}{0.1}\right)}.$$

Pertanto $K_B = 100$ e la risposta in frequenza presenta un polo semplice nell'origine ($\nu = -1$), un polo reale negativo in -10 ($1/T_1 = 10$ e $\mu_1 = 1$), un polo reale negativo in -0.1 ($1/T_2 = 0.1$ e $\mu_2 = 1$) ed una coppia di zeri complessi conigati con $\omega_n' = 10$ e $\xi' = -0.05$ (e $|\xi'| < 1/\sqrt{2}$). Si noti che i due zeri complessi coniugati hanno parte reale positiva e sono quindi instabili. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

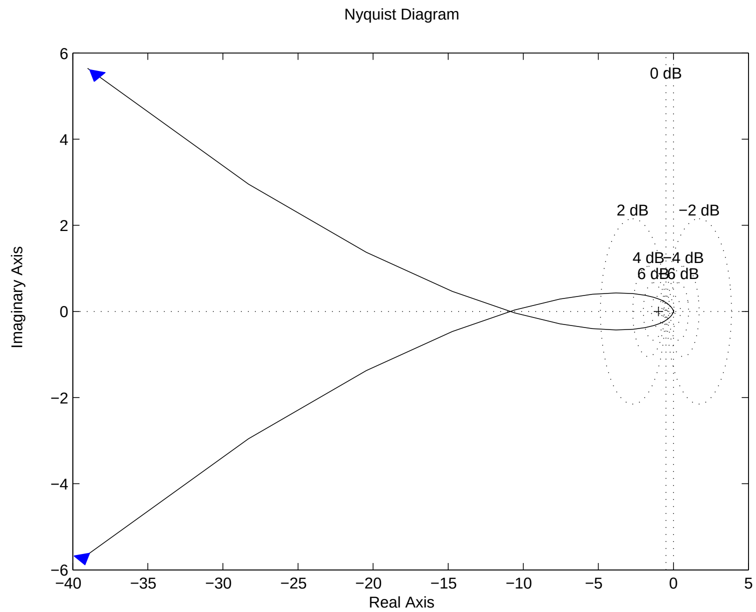




ii) [6 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



Si noti che il diagramma attraversa il semiasse reale negativo, come illustrato in questo dettaglio del diagramma di Nyquist.



Il diagramma di Nyquist, riportato al finito tramite un percorso di Nyquist modificato, compie due giri in verso orario attorno a $-1+j0$, ovvero $N=-2$. Poichè $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+}=0$, la condizione $N=-2$ assicura $n_{W+}=2$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha due poli a parte reale positiva.

Esercizio 2. i) [2.5 punti] È immediato verificare che $G(0)=1$, pertanto il sistema è di tipo 1 o superiore. Il calcolo della derivata di $G(s)$ valutata in 0 fornisce:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dG(s)}{ds}\right|_{s=0} &= \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1+10s}{0.1s^2+1.1s+1}\right)\right|_{s=0} \\
&= \left.\frac{10(0.1s^2+1.1s+1)-(1+10s)(0.2s+1.1)}{(0.1s^2+1.1s+1)^2}\right|_{s=0} \\
&= \frac{10-1.1}{1} = 8.9 \neq 0.
\end{aligned}$$

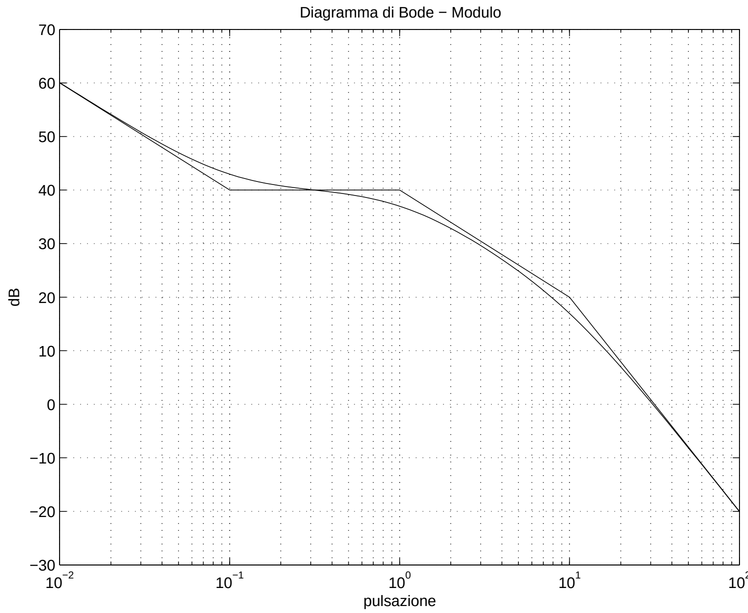
Pertanto il sistema è di tipo esattamente 1 e l'errore di regime permanente alla rampa lineare soddisfa $|e_{rp}|=8.9$.

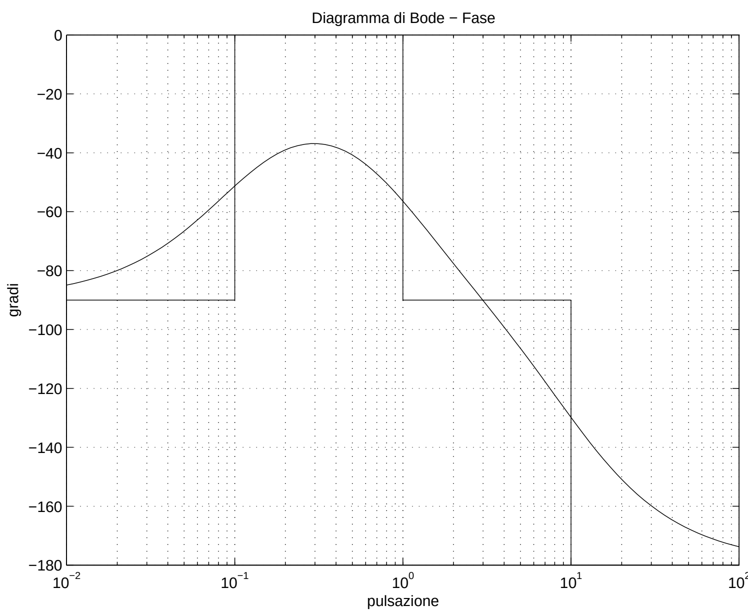
ii) [5 punti] Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp}=\frac{1}{K_B(C)}\leq 0.1$$

da cui segue $K_B(C)\geq 10$. Prendiamo $K_B(C)=10$ a cui corrisponde $C'(s)=\frac{10}{s}$.

I diagrammi di Bode di $G(s)=C'(s)G(s)$ sono i seguenti:





Si trova $10^{3/2}$ rad/s $\approx \omega_A < \omega_A^* = 50$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $12° \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 45°$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze fino a far sì che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 50$ rad/s e di sollevare la fase di almeno $33°$. Poiché $|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|_{db} = -8.13dB$, la lettura delle tabelle con i parametri delle reti anticipatrici fornisce, ad esempio,

$$\alpha = 0.25, \qquad u = \omega_A^* T = 3,$$

da cui

$$\alpha = 0.25, \qquad T = 3/50 = 0.06$$

e quindi

$$C_{ant}(s) = \frac{1+sT}{1+s\alpha T} = \frac{1+s0.06}{1+s0.015}.$$

In questo modo il diagramma delle ampiezze viene sollevato di poco più di 8 dB e il diagramma delle fasi di 34°-35°. Questa soluzione corrisponde a

$$C(s) = 10\frac{1+s0.06}{s(1+s0.015)}.$$

Esercizio 3. i) [4.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 2s^2 + 2as + (1-a).$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2a \\ 2 & 2 & 1-a \\ 1 & \dfrac{5a-1}{2} & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $1-a > 0$ e $5a-1 > 0$, ovvero $1/5 < a < 1$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $1/5 < a < 1$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s-2}{s^3+2s^2+2as+(1-a)}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo un solo zero in 2. Si tratta allora di andare a vedere per quali valori del parametro a, 2 è uno zero del polinomio al denominatore $d(s)$ e se, per tale valore di a, i rimanenti zeri sono tutti a parte reale negativa. Per $s = 2$ il polinomio $d(s)$ diventa

$$d(2) = 8 + 2\cdot 4 + 4a + (1-a) = 17 + 3a = 0,$$

ovvero $a = -17/3$. Sostituendo questo valore nel polinomio $d(s)$ otteniamo

$$s^3 + 2s^2 - \frac{34}{3}s + \frac{20}{3}.$$

Per valutare il numero di radici a parte reale positiva del polinomio ricorriamo, ancora, alla tabella di Routh. Si trova:

3	1	$-34/3$
2	2	$20/3$
1	-44/3	0
0	$20/3$	0

e pertanto $d(s)$, per $a = -17/3$, presenta due radici a parte reale positiva. Ciò ci permette di dire che, una volta effettuata la cancellazione del fattore $s-2$ tra numeratore e denominatore, al denominatore rimane uno zero instabile e pertanto $W(s)$ non risulta BIBO stabile.

Ne consegue che il sistema è BIBO stabile se e solo se $1/5 < a < 1$.

ii) [3 punti] Per $a = 1$, l' equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 2s^2 + 2s = s[(s+1)^2 + 1^2]$$

ed ha radici $\lambda_1 = 0$, di molteplicità $\mu_1 = 1$, e $\lambda_2 = -1+j, \lambda_3 = -1-j$ con $\mu_2 = \mu_3 = 1$. Pertanto, l'evoluzione libera del sistema, al variare delle condizioni iniziali, è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-t}\cos(t) + c_3 e^{-t}\sin(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Tenendo conto del fatto che

$$\begin{aligned}
0 = \quad & y(0^-) & = \quad & y_\ell(0^-) & = \quad & c_1 + c_2, \\
0 = \quad & \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & -c_2 + c_3, \\
-2 = \quad & \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = \quad & -2c_3,
\end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = -1, \qquad c_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad c_3 = 1.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = -1 + e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\sin(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 160 e successive.