COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
10 Dicembre 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (a+1)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{5}{4}\frac{dy(t)}{dt} - 2ay(t) = \frac{du(t)}{dt} + au(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$,

ii) si determini, se esiste, l'espressione della risposta di regime permanente del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \left[1 + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]\delta_{-1}(t)$$

ed alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 1, \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = -1;$$

iii) si determini l'espressione della risposta al gradino del sistema e la si tracci (almeno approssimativamente). Si determinino, inoltre, l'istante in cui la risposta al gradino raggiunge il suo valore massimo e la massima sovraelongazione percentuale.

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 100\ \frac{s^2(s-10)^2}{(1-s)^2\,(s^2+10s+10^4)}.$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

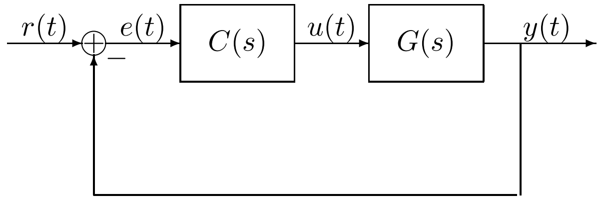
i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 10\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 100u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Sia $G(s)$ la sua funzione di trasferimento. Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore PD

$$C_{PD}(s) = K_p + K_d s \in \mathbb{R}[s]$$

in modo tale che a) il risultante sistema retroazionato risponda al gradino unitario in ingresso con errore di regime permanente non superiore a $e^*_{rp} = 10^{-3}$, b) la pulsazione di attraversamento del sistema in catena aperta sia all'incirca $\omega^*_A = 100$ rad/sec e c) il margine di fase (del sistema in catena aperta) sia circa pari a 45^0.

Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + (a+1)s^2 + \frac{5}{4}s - 2a.$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & \frac{5}{4} \\
2 & a+1 & -2a \\
1 & \dfrac{13a+5}{4(a+1)} & 0 \\
0 & -2a & 0
\end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $a+1 > 0$, $13a+5 > 0$ e $-2a > 0$, ovvero $-\frac{5}{13} < a < 0$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $-\frac{5}{13} < a < 0$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s+a}{s^3 + (a+1)s^2 + \frac{5}{4}s - 2a}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo un solo zero in $-a$. Pertanto può aver luogo una cancellazione se e solo se il polinomio $d(s)$ si annulla in $-a$. Ciò si verifica se e solo se

$$d(-a) = -a^3 + a^3 + a^2 - \frac{5}{4}a - 2a = a\left(a - \frac{13}{4}\right) = 0,$$

ovvero per $a = 0$ oppure per $a = \frac{13}{4}$.

Per $a = 0$ si trova

$$W(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + \frac{5}{4}s} = \frac{1}{s^2 + s + \frac{5}{4}},$$

e pertanto (applicando Cartesio al polinomio al denominatore) il sistema risulta BIBO stabile. Per $a = \frac{13}{4}$ il fattore che viene cancellato al numeratore ed al denominatore è relativo ad uno zero/polo reale negativo e pertanto si tratta di una cancellazione irrilevante, dal momento che affinché ci sia BIBO stabilità è necessario che ci sia asintotica stabilità che per tale valore di a non c'è.

ii) [4 punti] Per $a = 0$ il sistema viene descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{5}{4}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}.$$

Si tratta di un sistema non asintoticamente stabile, ma, in base all'analisi del precedente punto i), BIBO stabile. Per questa ragione esiste la risposta di regime permanente al segnale sinusoidale assegnato se e solo se l'evoluzione libera in corrispondenza alle specifiche condizioni iniziali assegnate risulta convergente a zero. Andiamo quindi a valutarla. I modi del sistema sono $1, e^{-t/2}\cos t, e^{-t/2}\sin t$, e pertanto l'espressione della generica evoluzione libera d'uscita sarà

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-t/2}\cos t + c_3 e^{-t/2}\sin t.$$

Il calcolo delle derivate di ordine 1 e 2 della $y_\ell(t)$ porge:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_\ell}{dt} &= (c_3 - c_2/2)e^{-t/2}\cos t + (-c_3/2 - c_2)e^{-t/2}\sin t \\
\frac{d^2y_\ell}{dt^2} &= (-c_3 - 3/4c_2)e^{-t/2}\cos t + (-3/4c_3 + c_2)e^{-t/2}\sin t.
\end{aligned}$$

Se ora imponiamo il soddisfacimento delle condizioni iniziali:

$$\begin{array}{rcccl}
0 = & y(0^-) & = & y_\ell(0^-) & = c_1 + c_2, \\
1 = & \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = & \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = c_3 - c_2/2, \\
-1 = & \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} & = & \left.\frac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} & = -c_3 - 3/4c_2,
\end{array}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad c_3 = 1.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = e^{-t/2}\sin t, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Esiste allora la risposta di regime permanente al segnale $u(t)$ ed essa assume la forma

$$y_{rp}(t) = W(0) + |W(j/2)| \cdot \cos(t/2 + \arg W(j/2)).$$

Si trova (per $a = 0$)

$$W(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega + \frac{5}{4}}$$

e quindi

$$W(0) = \frac{4}{5}$$

e

$$|W(j/2)| = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \arg W(j/2) = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = -0.4636 \text{ rad}.$$

iii) [4 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$Y_f(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}.$$

La decomposizione in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= \frac{4}{5}\frac{1}{s} - \frac{4}{5}\frac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1^2} = \frac{4}{5}\frac{1}{s} - \frac{4}{5}\left\{\frac{s+1/2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\right\} \\ &= \frac{4}{5}\frac{1}{s} - \frac{4}{5}\frac{s+1/2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1^2} - \frac{2}{5}\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1^2} \end{aligned}$$

e ad essa corrisponde la funzione del tempo

$$y_f(t) = \left[\frac{4}{5} - \frac{4}{5}e^{-t/2}\cos t - \frac{2}{5}e^{-t/2}\sin t\right]\delta_{-1}(t).$$

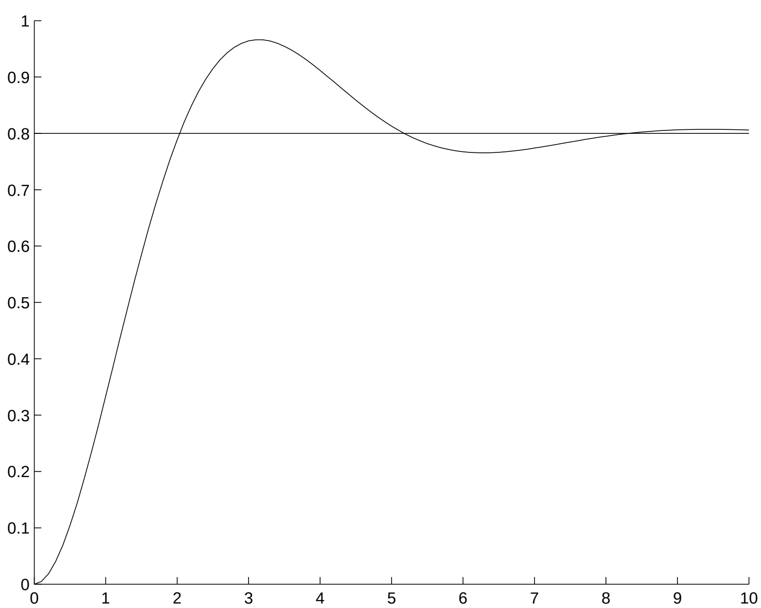
La sua derivata vale per $t > 0$

$$\frac{dy_f}{dt} = e^{-t/2}\sin t.$$

Chiaramente tale derivata è inizialmente non negativa, e successivamente si annulla in corrispondenza a tutti i punti del tipo $t_k = k\pi$, con k intero positivo. Pertanto la risposta al gradino ha un andamento oscillatorio. Chiaramente l'istante in cui la risposta al gradino raggiunge il suo massimo è $t_{\max} = t_1 = \pi$ sec. Per valutare la sovraelongazione è necessario valutare il punto di massimo della risposta a gradino che certamente sarà $y_f\left(\pi\right)$. Si trova

$$y_f\left(\pi\right) = \frac{4}{5}\left(1 + e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right),$$

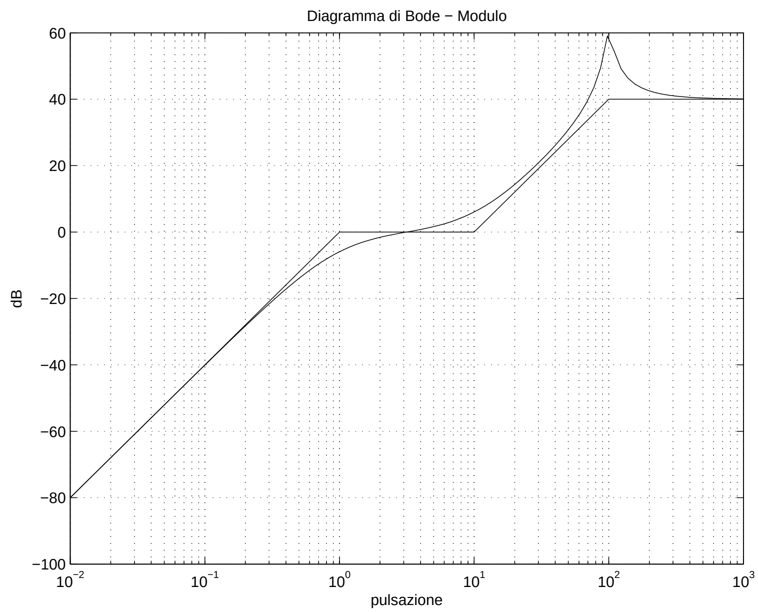
da cui segue che $s = \frac{y_f(\pi)-\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} \cdot 100\% = e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cdot 100\% = 20.79\%$. Il grafico della risposta al gradino è il seguente:

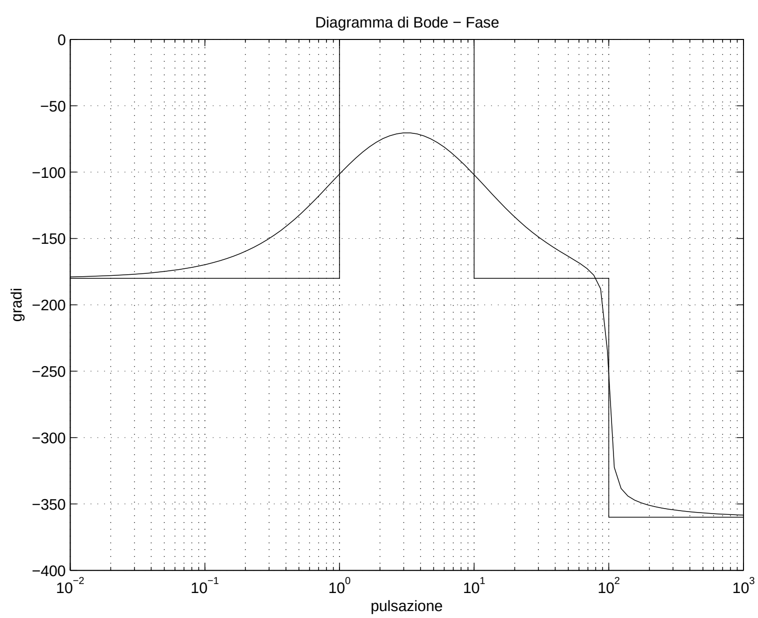


Esercizio 2. i) [3.5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

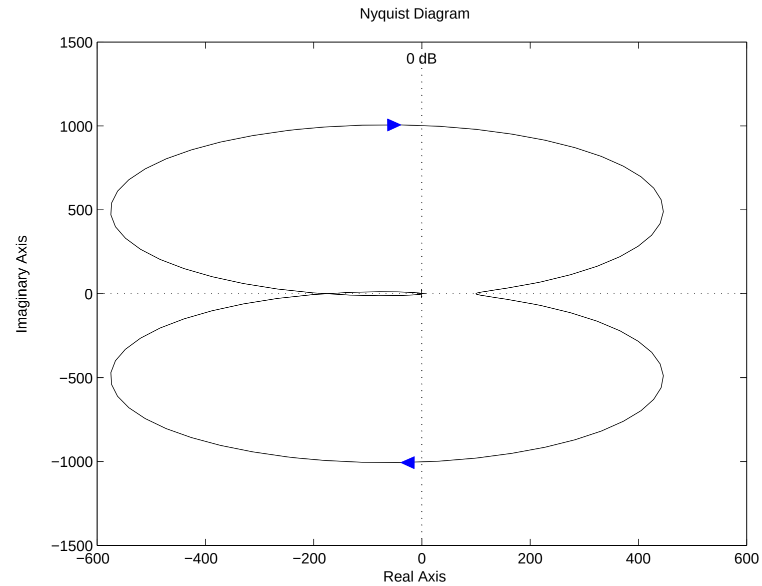
$$G(s) = \frac{s^2\left(1-\frac{s}{10}\right)^2}{(1-s)^2\left(1+2\frac{1}{20}\frac{s}{100}+\frac{s^2}{100^2}\right)}.$$

Pertanto $K_B = 1$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale positivo con $1/T' = -10$ e $\mu' = 2$, uno zero doppio nell'origine ($\nu = -2$), un polo reale positivo con $1/T = -1$ e $\mu = 2$ ed una coppia di poli complessi conigati con $\omega_n = 100$ e $\xi = 1/20$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$). Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

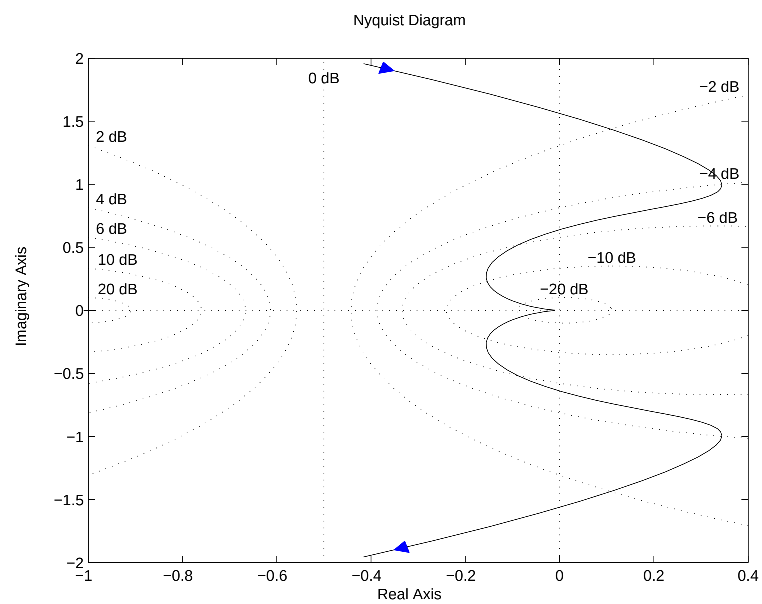




ii) [5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Un dettaglio del diagramma di Nyquist in corrispondenza a valori della pulsazione molto prossimi a $\omega = 0$ è riportato nella seguente figura.



Il diagramma risulta già chiuso in quanto $G(s)$ è priva di poli a parte reale nulla. Il diagramma di Nyquist compie due giri in verso orario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = -2$. Poichè $G(s)$ ha 2 poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 2$, la condizione $N = -2$ assicura $n_{W+} = 4$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha 4 poli a parte reale positiva.

Esercizio 3. [4 punti] Il sistema è di tipo 0 e non viene chiesto di modificarne il tipo. L'errore di regime permanente in questo caso assume l'espressione

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)K_B(G)},$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode del processo $G(s)$, il cui valore è 10, mentre $K_B(C)$ è il guadagno di Bode del controllore, parametro da fissare. Il controllore PD può essere riscritto nella forma

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s\right),$$

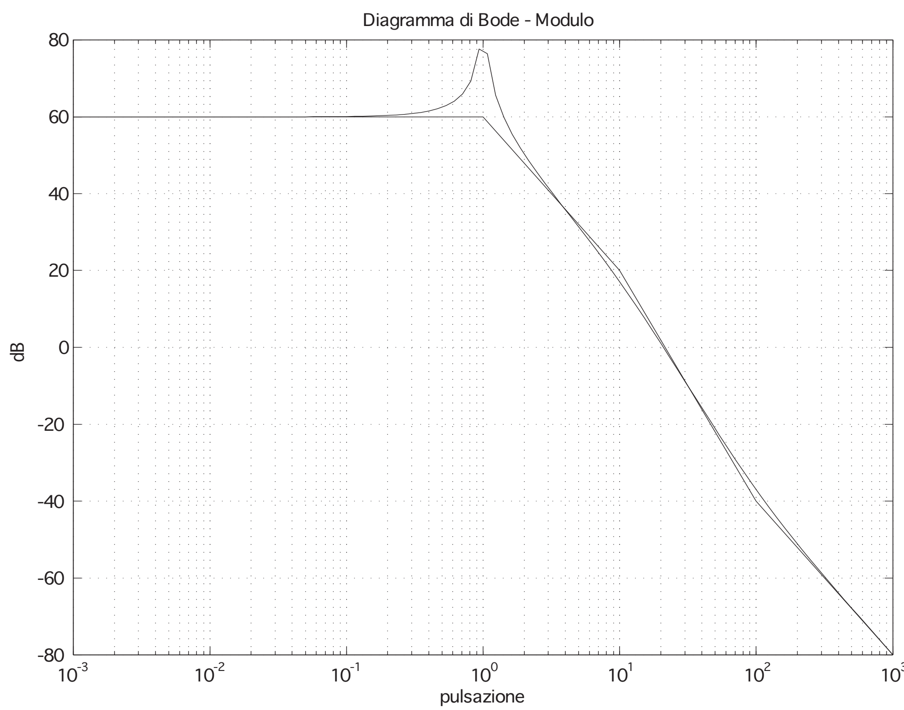
e, pertanto, K_p rappresenta il guadagno di Bode del controllore. Pertanto, se vogliamo che il sistema retroazionato sia di tipo 0 con errore di regime permanente al più 10^{-3}, è sufficiente imporre

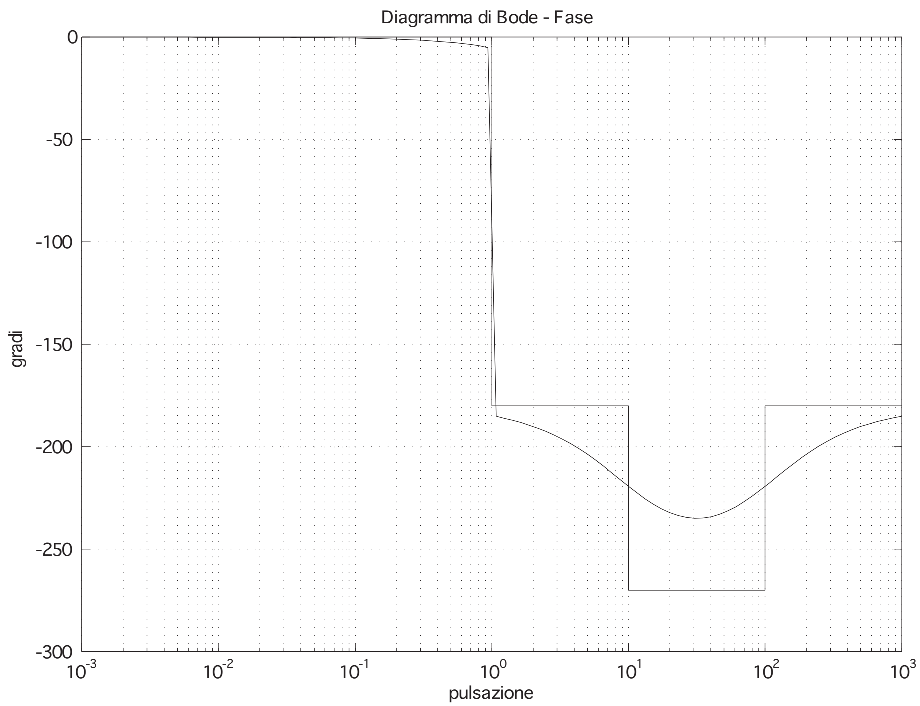
$$e_{rp} = \frac{1}{1 + 10K_p} \leq 10^{-3},$$

ovvero

$$K_p \geq 10^2 - 0.1 \approx 100.$$

Scegliamo, preliminarmente, $K_p = 10^2$ e tracciamo il diagramma di Bode di $K_p G(s)$, ottenendo il diagramma di Bode illustrato qui di seguito.





La pulsazione di attraversamento in questo caso è $\omega_A = 20$ rad/s mentre il margine di fase alla pulsazione desiderata ω_A^* è circa -45^o. Se inseriamo uno zero in -10, ovvero poniamo $\frac{K_d}{K_p} = 0.1$, e alziamo il diagramma delle ampiezze di 20 dB (il che corrisponde a moltiplicare per un ulteriore fattore 10 il guadagno K_p del controllore) otteniamo il risultato desiderato sia dal punto di vista della pulsazione di attraversamento che dal punto di vista del margine di fase. Pertanto il controllore PD desiderato è

$$C(s) = 10 \cdot 100 \left(1 + \frac{s}{10}\right) = 1000 + 100s.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 160 e successive.