COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
11 Gennaio 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 3u(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) per $a = 1/3$ si determini, se esiste, l'insieme di tutte le condizioni iniziali

$$y(0^-), \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2}$$

in corrispondenza a cui esiste la risposta di regime permanente del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \left[1 + \cos\left(\frac{2}{3}t\right)\right]\delta_{-1}(t),$$

e, qualora tale insieme non sia vuoto, si determini l'espressione di tale risposta di regime permanente;
[Suggerimento: per la valutazione dei poli della funzione di trasferimento, si sfrutti l'analisi della BIBO stabilità portata avanti al punto precedente].

iii) per $a = 3/2$ si determini l'espressione dell'evoluzione forzata del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta(t) + 2\delta_{-1}(t).$$

[Suggerimento: si verifichi la possibilità di semplificazioni incrociate tra $U(s)$ e $W(s)$.]

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 100}{s(s-1)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

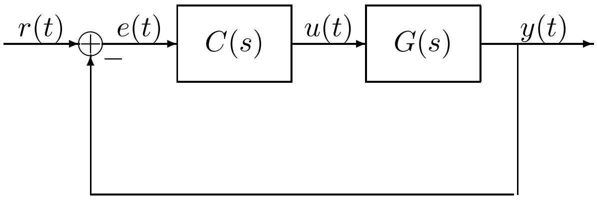
i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$.

ii) Si tracci il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+10)^2}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore PI

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \in \mathbb{R}(s)$$

in modo tale che

1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (al gradino unitario) non superiore a 0.1;

2) la funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)C_{PI}(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 10^3$ rad/sec e margine di fase almeno pari a 70°.

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti, si derivi dettagliatamente la descrizione della dinamica del sistema come somma di evoluzione libera ed evoluzione forzata nel dominio delle trasformate di Laplace.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 2as^2 + 3s + 2.$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2a & 2 \\ 1 & \dfrac{6a-2}{2a} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $2a > 0$ e $6a-2 > 0$, ovvero $1/3 < a$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $1/3 < a$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2+3}{s^3 + 2as^2 + 3s + 2}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri immaginari coniugati. Per questa ragione una semplificazione può aver luogo tra numeratore e denominatore se e solo se per qualche valore di a il polinomio al denominatore risulta multiplo di s^2+3. In altre parole se e solo se per qualche valore di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$s^3 + 2as^2 + 3s + 2 = (s^2+3)(s-\lambda), \qquad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Si vede subito che condizione necessaria affinché la precedente identità sia soddisfatta è che $\lambda = -2/3$. Per tale valore di λ, il secondo membro della (**??**) diventa

$$(s^2+3)\left(s+\frac{2}{3}\right) = s^3 + \frac{2}{3}s^2 + 3s + 2,$$

ed è evidente che ciò può accadere se e solo se $2a = \frac{2}{3}$, ovvero per $a = \frac{1}{3}$. Per tale valore di a si trova

$$W(s) = \frac{1}{s+\frac{2}{3}}.$$

Ne consegue che il sistema è BIBO stabile se e solo se $1/3 \le a$.

ii) [4 punti] Per $a = 1/3$ il sistema viene descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{2}{3}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 3u(t).$$

Si tratta di un sistema non asintoticamente stabile, ma, in base all'analisi del precedente punto i), BIBO stabile. Per questa ragione esiste la risposta di regime permanente al segnale assegnato se e solo se le condizioni iniziali assegnate assicurano che la corrispondente evoluzione libera converga a zero. Andiamo quindi a valutare quali sono tali condizioni. In base all'analisi portata avanti al punto i) per $a = 1/3$ il polinomio coinvolto nell'equazione caratteristica del sistema risulta fattorizzato nella forma

$$(s^2 + 3)\left(s + \frac{2}{3}\right)$$

e pertanto i modi del sistema sono $\cos(\sqrt{3}t), \sin(\sqrt{3}t)$ e $e^{-\frac{2}{3}t}$, e pertanto l'espressione della generica evoluzione libera d'uscita sarà

$$y_\ell(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t) + c_3 e^{-\frac{2}{3}t}.$$

Chiaramente tale evoluzione libera risulta convergente a zero se e solo se $c_1 = c_2 = 0$, ovvero

$$y_\ell(t) = c_3 e^{-\frac{2}{3}t}.$$

Il calcolo delle derivate di ordine 1 e 2 della $y_\ell(t)$ porge:

$$\begin{aligned} \frac{dy_\ell}{dt} &= -\frac{2}{3}c_3 e^{-\frac{2}{3}t} \\ \frac{d^2 y_\ell}{dt^2} &= \frac{4}{9}c_3 e^{-\frac{2}{3}t}. \end{aligned}$$

Se ora valutiamo le condizioni iniziali per $t = 0$ troviamo:

$$\begin{aligned} y(0^-) &= y_\ell(0^-) = c_3, \\ \left.\tfrac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} &= \left.\tfrac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -\tfrac{2}{3}c_3, \\ \left.\tfrac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} &= \left.\tfrac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} = \tfrac{4}{9}c_3. \end{aligned}$$

Pertanto l'insieme delle condizioni iniziali a cui corrisponde un'evoluzione libera convergente a zero sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(0^-) = c_3, \qquad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -\frac{2}{3}c_3, \qquad \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} = \frac{4}{9}c_3, \qquad \exists\ c_3 \in \mathbb{R}.$$

In corrispondenza a tali condizioni iniziali esiste allora la risposta di regime permanente al segnale $u(t)$ ed essa assume la forma

$$y_{rp}(t) = W(0) + \left|W\left(\frac{2}{3}j\right)\right| \cdot \cos\left(\frac{2}{3}t + \arg W\left(\frac{2}{3}j\right)\right).$$

Si trova

$$W(0) = \frac{3}{2} \qquad W\left(\frac{2}{3}j\right) = \frac{1}{\frac{2}{3} + j\frac{2}{3}}$$

e quindi

$$\left|W\left(\frac{2}{3}j\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{8}}, \qquad \arg W\left(\frac{2}{3}j\right) = 0 - \arg\left(\frac{2}{3} + j\frac{2}{3}\right) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}.$$

iii) [3.5 punti] Per $a = 3/2$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2+3}{s^3+3s^2+3s+2}.$$

La trasformata di Laplace del segnale di ingresso è

$$U(s) = 1 + \frac{2}{s} = \frac{s+2}{s}$$

e quindi la trasformata di Laplace dell'uscita (forzata) è

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s^2+3}{s^3+3s^2+3s+2}\frac{s+2}{s}.$$

Osservo che

$$s^3+3s^2+3s+2\Big|_{s=-2} = 0$$

e pertanto s^3+3s^2+3s+2 è multiplo di $s+2$. Si trova $s^3+3s^2+3s+2 = (s+2)(s^2+s+1)$, da cui segue

$$Y_f(s) = \frac{s^2+3}{s(s^2+s+1)}.$$

La decomposizione in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= \frac{3}{s} + \frac{-2s-3}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{s} - 2\cdot\frac{s+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{3}{s} - 2\cdot\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] \end{aligned}$$

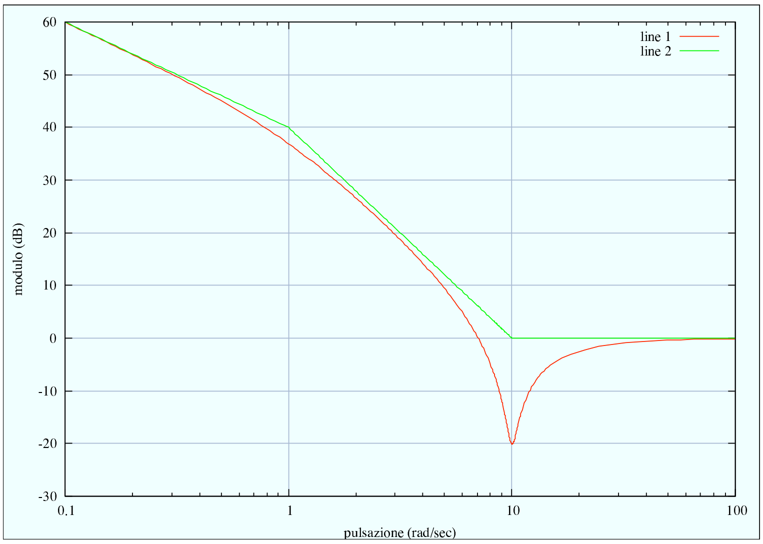
e ad essa corrisponde la funzione del tempo

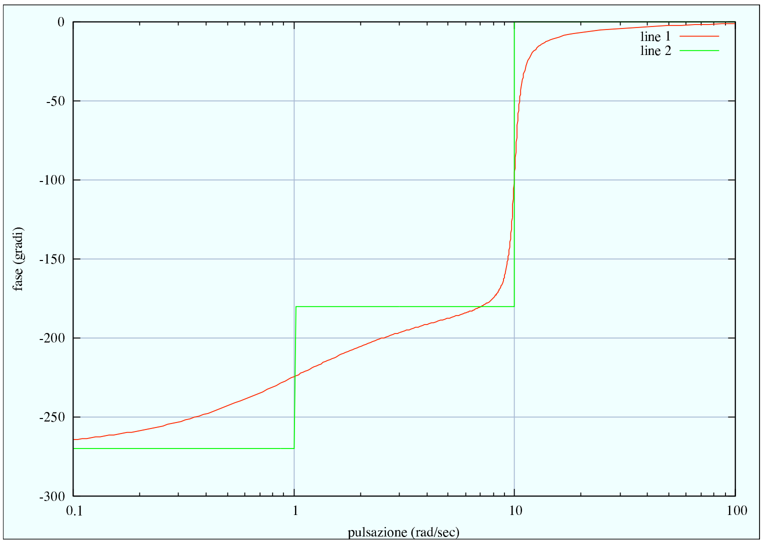
$$y_f(t) = \left[3 - 2e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

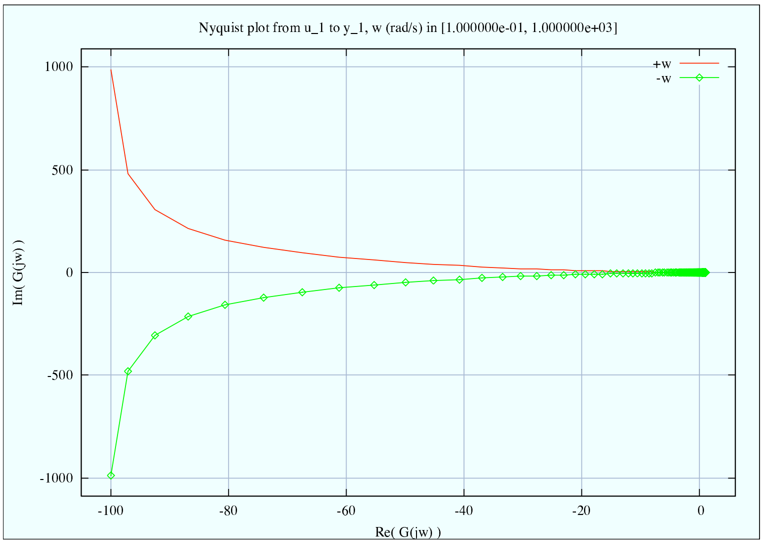
$$G(s) = \frac{s^2+s+100}{s(s-1)} = -100\frac{1+2\frac{1}{20}\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}}{s(1-s)}.$$

Pertanto $K_B = -100$ e la risposta in frequenza presenta un termine trinomio al numeratore corrispondente a due zeri complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n' = 10$ e smorzamento $\xi' = 1/20 = 0.05$, un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), un polo reale positivo doppio con $1/T_1 = -1$ e $\mu_1 = 2$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

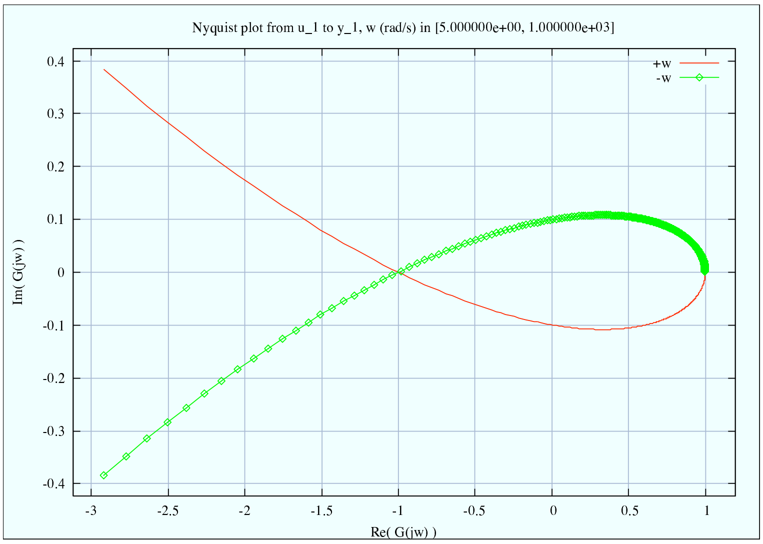




ii) [6 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza $G(j\omega)$ è:



In figura il ramo rosso rappresenta il diagramma di $G(j\omega)$ per valori positivi di ω, mentre il ramo verde il diagramma di $G(j\omega)$ per valori negativi di ω. Il dettaglio del precedente diagramma in un intorno del punto critico è riportato qui di seguito:



Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ attraversa per due valori del parametro ω (uno positivo ed uno negativo) il punto $-1 + j0$. Ciò significa che la $W(j\omega)$ ha due poli immaginari coniugati. Poichè la funzione di trasferimento del sistema retroazionato è di secondo ordine non c'è altro da dire. Di fatto, se ricorriamo ad un percorso di Nyquist modificato che permetta sia di riportare il diagramma al finito che di evitare il passaggio per il punto critico, troviamo che $N = 1$, e poichè $G(s)$ ha un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, ne consegue che $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha due poli immaginari coniugati.

Esercizio 3. [4.5 punti] Poichè $C_{PI}(s) = K_i \frac{1+\frac{K_p}{K_i}s}{s}$, per $K_i \neq 0$ la funzione di trasferimento in catena aperta $C_{PI}(s)G(s)$ presenta un polo semplice nell'origine, e quindi il sistema retroazionato è di tipo 1 e l'espressione dell'errore di regime permanente al gradino unitario è data da

$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(G)K_i}$$

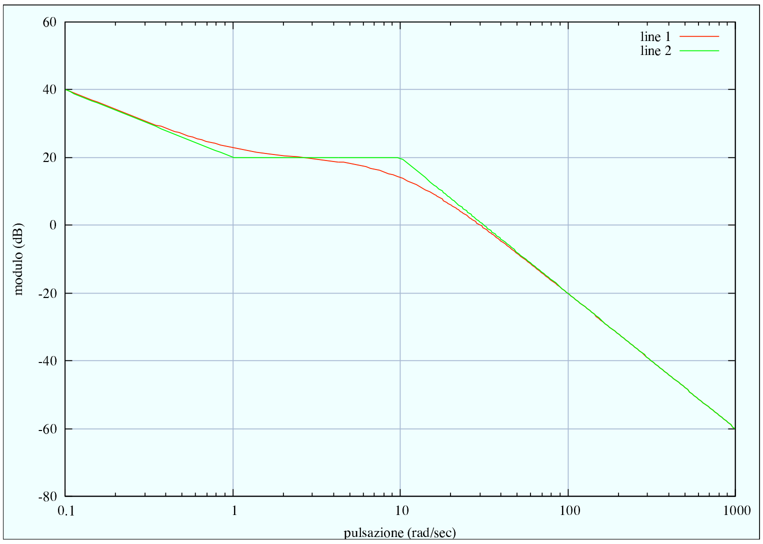
dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode di $G(s)$ (in questo caso di valore 0.01). Imponendo $e_{rp} \leq 0.1$ si trova

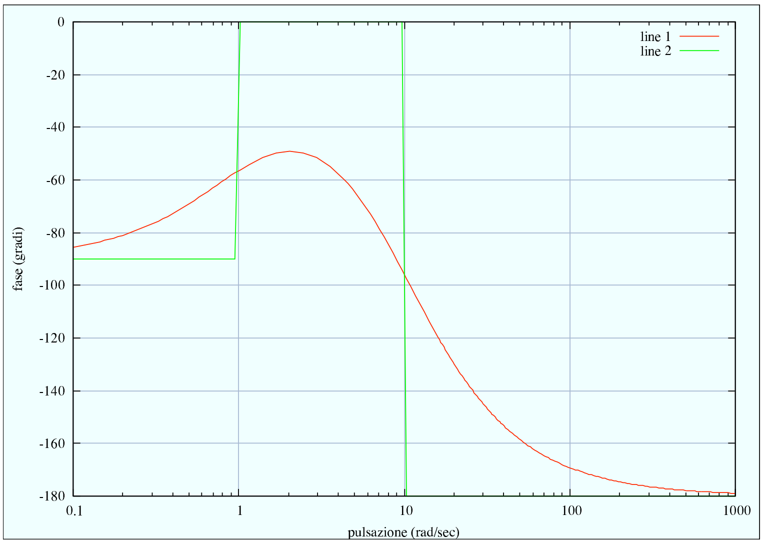
$$\frac{1}{K_B(G)K_i} = \frac{1}{0.01K_i} \leq 0.1,$$

da cui segue $K_i \geq 10^3$. Assumiamo nel seguito $K_i = 10^3$. La funzione di trasferimento del sistema in catena aperta diventa allora

$$C_{PI}(s)G(s) = 10^3 \frac{(s+1)\left(1+\frac{K_p}{K_i}s\right)}{s(s+10)^2} = 10\frac{(1+s)\left(1+\frac{K_p}{K_i}s\right)}{s(1+0.1s)^2}.$$

Tracciamone il diagramma di Bode di ampiezza e fase:





Si trova che un modo semplice per conseguire entrambi gli obiettivi su pulsazione di attraversamento e margine di fase consiste nell'inserire uno zero in corrispondenza alla pulsazione 1 rad/sec. Ciò equivale ad assumere

$$1 + \frac{K_p}{K_i} s = 1 + s$$

e porta a $K_p = 10^3$. Pertanto un controllore PI che permette di conseguire gli obiettivi assegnati è

$$C_{PI}(s) = 10^3 + \frac{10^3}{s} = 10^3 \frac{1+s}{s}.$$

Teoria. [4 punti] Si veda il Capitolo 3, paragrafo 3.3, del Libro di testo.