

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

25 Giugno 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (1+a) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{du(t)}{dt}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

con a parametro reale.

- i) Si determini per quale valore di a il sistema presenta tra le sue evoluzioni libere il segnale

$$y_\ell(t) = 4 \sin t,$$

e, in corrispondenza a tale valore di a , si determinino le condizioni iniziali, $y(0^-)$ e $\frac{dy(0^-)}{dt}$, che determinano quella specifica evoluzione libera.

- ii) Si determini per quale valore di a il sistema risponde al segnale di ingresso

$$u(t) = (1+t)\delta_{-1}(t)$$

con l'uscita forzata

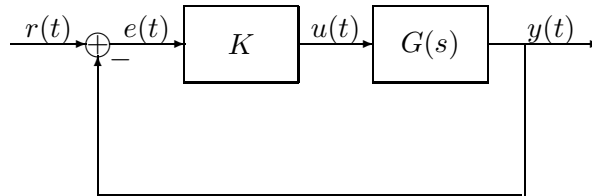
$$y_f(t) = (1 - e^{-t})\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2.

- i) Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2 - 5}{s^3 + 4s^2 + 5s - 1},$$

si supponga di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



con K parametro reale non nullo. Si valuti al variare di K la stabilità BIBO del risultante sistema retroazionato $W(s)$.

Si consideri, nel seguito dell'esercizio, il modello ingresso/uscita a tempo continuo di funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10 \frac{(s+1)(s-100)}{s(s^2 - 10s + 100)}.$$

- ii) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;
- iii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e se ne studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{1+s}{s^2+5s+100},$$

si progettino un controllo in retroazione in modo tale che

- 1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (al gradino unitario) pari a $e_{rp}^* = 0.1$;
- 2) la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 1000$ rad/sec e
- 3) abbia margine di fase pari almeno a 80° .

Teoria. Si consideri un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t),$$

($a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$) e sollecitato dal segnale di ingresso

$$u(t) = e^{j\tilde{\omega}t} \delta_{-1}(t),$$

con $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ fissato. Si introduca il concetto di risposta di regime permanente, e si illustri in dettaglio la relazione tra l'evoluzione complessiva (d'uscita) $y(t)$ del sistema in corrispondenza all'ingresso assegnato e l'uscita di regime permanente $y_{rp}(t)$, evidenziando le condizioni sotto cui tale risposta di regime permanente esiste, sia nel caso in cui le condizioni iniziali del sistema siano assegnate e arbitrarie che nel caso in cui le condizioni iniziali siano nulle e il sistema evolva, pertanto, di sola evoluzione forzata.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] Un sistema di secondo ordine presenta tra le sue evoluzioni libere il segnale $4\sin t$ se e solo se i suoi modi elementari (scritti in forma reale) sono $\sin t$ e $\cos t$, ovvero i suoi modi elementari (scritti in forma complessa) sono e^{jt} ed e^{-jt} , ovvero le radici della sua equazione caratteristica sono $\pm j$. L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = a^2 s^2 + (1+a)s + 1$$

ed ha radici $\pm j$ se e solo se

$$0 = a^2(-1) + (1+a)(\pm j) + 1 = (1-a^2) \pm j(1+a)$$

ovvero se e solo se $a = -1$. Per tale valore di a le condizioni iniziali che producono tale evoluzione libera sono

$$\begin{aligned} y(0^-) &= y_\ell(0) = 4\sin t|_{t=0} = 0, \\ \frac{dy(0^-)}{dt} &= \frac{dy_\ell(0)}{dt} = 4\cos t|_{t=0} = 4. \end{aligned}$$

ii) [3 punti] La trasformata di Laplace del segnale di ingresso è

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{s+1}{s^2}$$

mentre la trasformata di Laplace dell'uscita (forzata) è

$$Y_f(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

D'altra parte deve valere

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s}{a^2 s^2 + (1+a)s + 1} \cdot \frac{s+1}{s^2} = \frac{s+1}{s[a^2 s^2 + (1+a)s + 1]}.$$

Imponendo la coincidenza delle due precedenti espressioni di $Y_f(s)$ si trova

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{s+1}{s[a^2 s^2 + (1+a)s + 1]}$$

che porta a

$$a^2 s^2 + (1+a)s + 1 = (s+1)^2$$

e ciò si verifica se e solo se $a = 1$.

Esercizio 2. i) [3.5 punti] Posto

$$\begin{aligned} d(s) &= s^3 + 4s^2 + 5s - 1, \\ n(s) &= s^2 - 5, \end{aligned}$$

per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato al variare di K occorre e basta valutare (attraverso il criterio di Routh) per quali valori di K il polinomio

$$d(s) + Kn(s) = (s^3 + 4s^2 + 5s - 1) + K(s^2 - 5) = s^3 + (4 + K)s^2 + 5s - (1 + 5K)$$

risulti di Hurwitz. La tabella di Routh fornisce

3	1	5
2	4+K	-(1+5K)
1	$\frac{21+10K}{4+K}$	0
0	-(1+5K)	0

Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se valgono simultaneamente

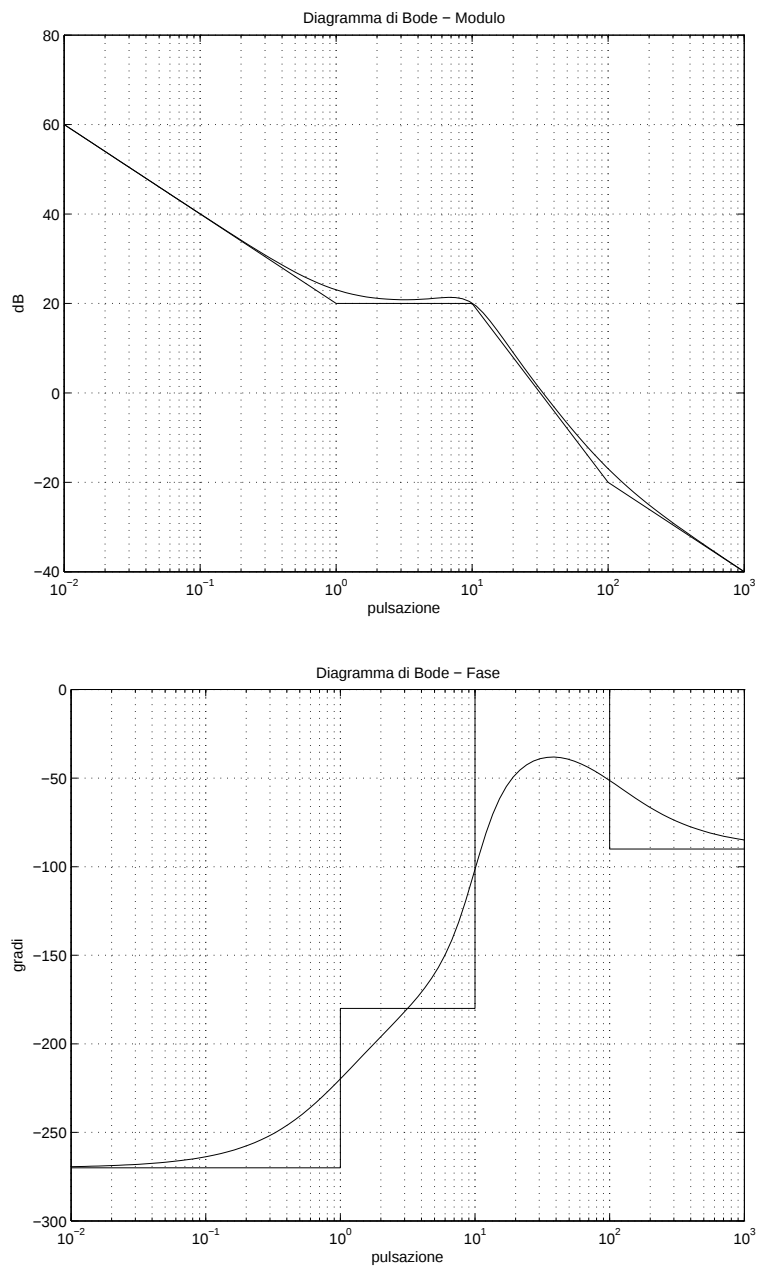
$$\begin{cases} 4 + K > 0 \\ 21 + 10K > 0 \\ -(1 + 5K) > 0 \end{cases}$$

il che si verifica se e solo se $-\frac{21}{10} < K < -\frac{1}{5}$.

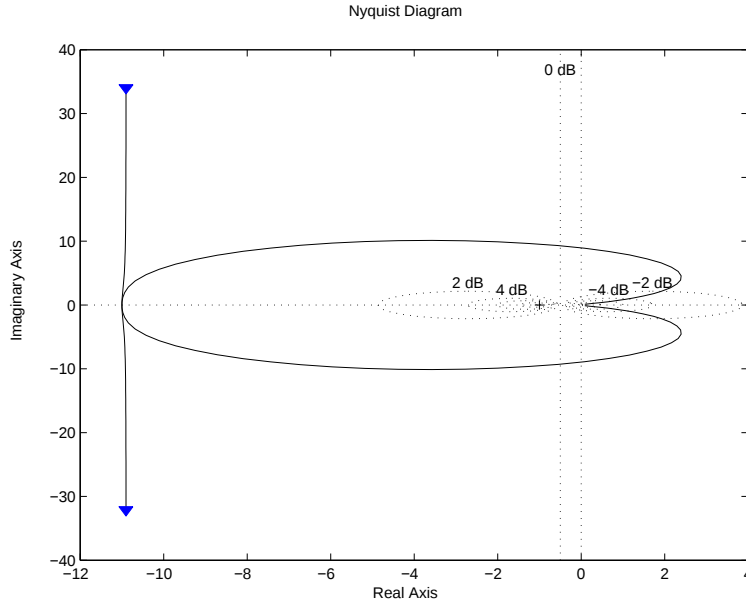
ii) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = (-10) \frac{(1+s) \left(1 - \frac{s}{100}\right)}{s \left(\frac{s^2}{10^2} - 2 \cdot 0.5 \frac{s}{10} + 1\right)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale negativo in -1 ($1/T'_1 = 1$ e $\mu'_1 = 1$), uno zero reale positivo in 100 ($1/T'_2 = -100$ e $\mu'_2 = 1$) ed una coppia di poli complessi coniugati con $\omega_n = 10$ e $\xi = -0.5$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$). Si noti che i due poli complessi coniugati hanno smorzamento negativo, ovvero parte reale positiva, e sono quindi instabili. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.



ii) [6.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



Si noti che il diagramma arriva, per $\omega \rightarrow +\infty$, con fase di $270^\circ = -90^\circ$, tuttavia per motivi puramente numerici questo fatto non è ben visibile dal diagramma. Stesso discorso vale per $\omega \rightarrow -\infty$, dove la fase è di 90° .

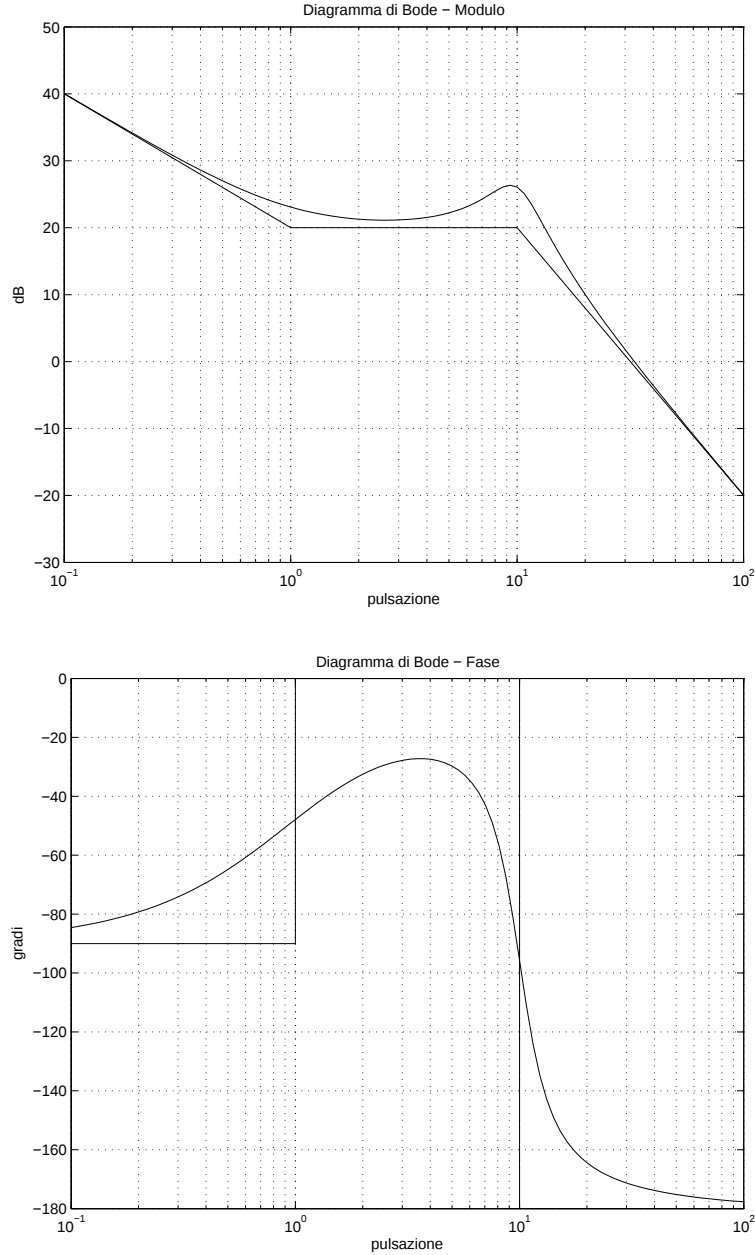
Per valutare quanti giri il diagramma compie attorno al punto $-1 + j0$ è necessario stimare se il punto di attraversamento del semiasse reale negativo da parte del diagramma di Nyquist si trovi a sinistra o a destra del punto $-1 + j0$. Dalla valutazione del diagramma di Bode si vede che quando la fase assume il valore 180° (in corrispondenza a $\omega = 10$ rad/sec) il modulo si trova molto al di sopra del valore 0 dB. Pertanto l'attraversamento del semiasse reale negativo avviene alla sinistra del punto critico. Chiudendo il diagramma al finito (da $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$ in senso orario) si trova che esso compie, quindi, un solo giro in verso antiorario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 1$. Poichè $G(s)$ ha 2 poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 2$, la condizione $N = 1$ assicura $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile e presenta un polo reale positivo.

Esercizio 3. [5 punti] Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)0.1} \approx 0.1$$

da cui segue $K_B(C) \approx 100$. Prendiamo $K_B(C) = 100$ a cui corrisponde $C'(s) = \frac{100}{s}$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:



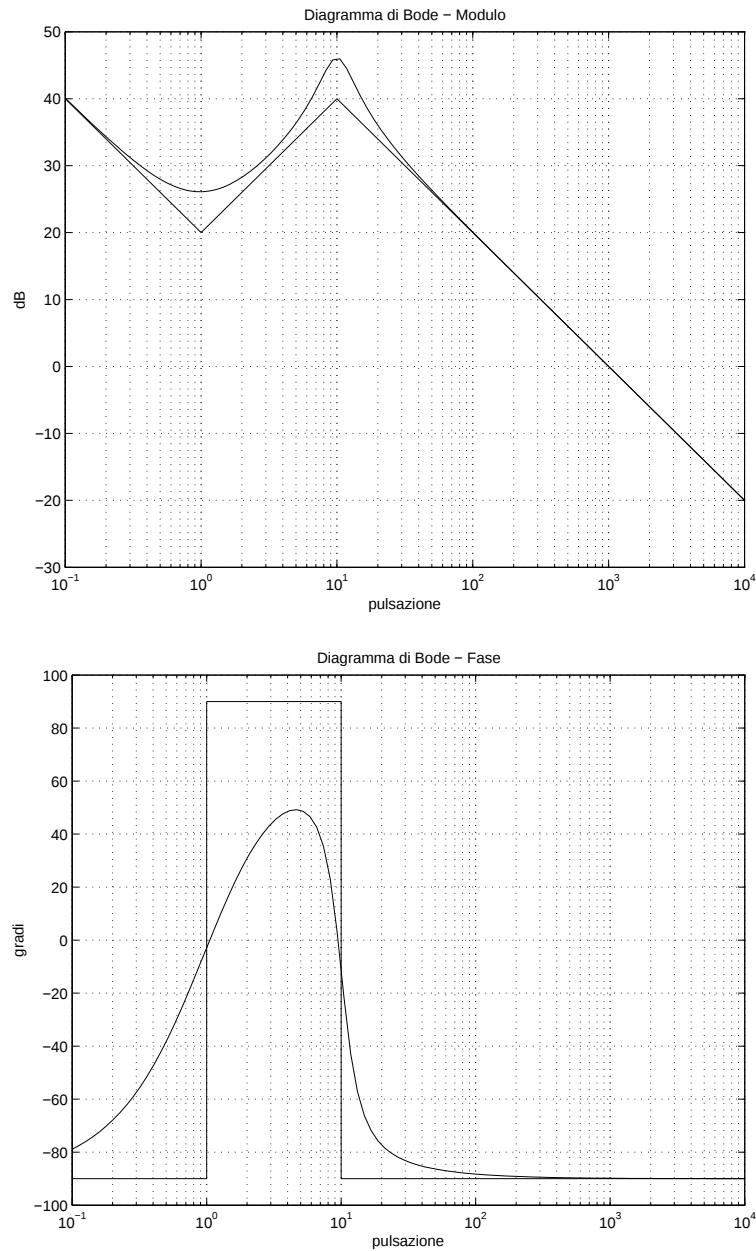
Si trova $10^{3/2} \text{ rad/s} \approx \omega_A < \omega_A^* = 1000 \text{ rad/s}$ e $m_\psi(\omega_A^*) := 180^\circ + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $0^\circ \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 65^\circ$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze fino a far sì che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 1000 \text{ rad/s}$ e di sollevare la fase di almeno 65° . Va sottolineato che il vincolo sull'errore di regime permanente mi impedisce di modificare il guadagno di Bode del controllore e pertanto potrò agire solo introducendo zeri e poli.

Una soluzione "ad occhio" può essere ottenuta introducendo opportunamente uno zero prima della pulsazione di attraversamento in modo tale da soddisfare entrambi i requisiti su pulsazione di attraversamento e fase. Tenuto conto del fatto che comunque il controllore ha già un polo nell'origine, il risultante controllore $C(s)$ sarà comunque proprio e quindi non è necessario introdurre ulteriori poli. Introducendo semplicemente

uno zero in -1 , ovvero un fattore $(1 + s)$, osservo che i diagrammi di Bode di

$$C(s)G(s) = 100 \frac{1+s}{s} \cdot 0.1 \frac{1+s}{1 + 2 \cdot 0.25 \frac{s}{10} + \frac{s^2}{10^2}}$$

diventano



e pertanto tutte le specifiche sono soddisfatte. Pertanto un controllore che consegue l'obiettivo desiderato è

$$C(s) = 100 \frac{1+s}{s}.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 4 del Libro di testo.