

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

20 Settembre 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + (a+1)\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{5}{4} + a\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{5a}{4}y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + a\frac{du(t)}{dt},$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$,

- ii) si determini, in corrispondenza a quali terne di condizioni iniziali $\left(y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2}\right)$, l'evoluzione libera del sistema è di tipo sinusoidale smorzato, con ciò intendendo che è del tipo

$$y_\ell(t) = Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi), \quad t \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente, del tipo

$$y_\ell(t) = Be^{\sigma t} \sin(\omega t + \psi), \quad t \in \mathbb{R},$$

con $\sigma < 0, \omega \neq 0$.

- iii) si determini, se esiste, un ingresso causale $u(t)$ a cui corrisponda un'uscita in evoluzione forzata di tipo puramente esponenziale, ovvero $y_f(t) = e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$. [Suggerimento: si ricorra alle trasformate di Laplace].

Esercizio 2. Con riferimento al sistema ingresso/uscita di funzione di trasferimento

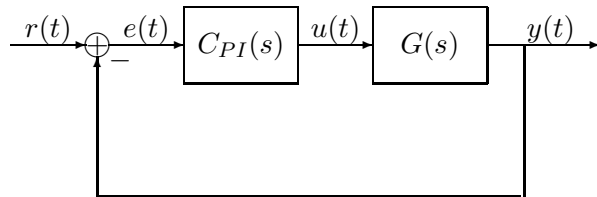
$$G(s) = -10 \frac{(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s+1)(s-10)},$$

- i) si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, del sistema, e, a partire da esso,
- ii) si tracci il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, del sistema, e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s+10}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore PI

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \in \mathbb{R}(s)$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato, di funzione di trasferimento $W(s)$, soddisfi ai seguenti requisiti:

- 1) sia BIBO stabile;
- 2) la risposta impulsiva del sistema sia combinazione lineare di due modi sinusoidali smorzati;
- 3) la $W(s)$ presenti uno zero instabile.

Teoria. Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Supponendo note le caratterizzazioni di tipo 0 e di tipo 1 in termini di $W(0)$ e $\frac{dW(0)}{ds}$, si dimostri che, nel caso in cui $W(s)$ sia la funzione di trasferimento di un sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa di un sistema di funzione di trasferimento $G(s)$, il tipo del sistema (0 o 1) coincide con la molteplicità del polo in 0 della $G(s)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + (a+1)s^2 + \left(\frac{5}{4} + a\right)s + \frac{5a}{4}.$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & \frac{5}{4} + a \\ 2 & a+1 & \frac{5a}{4} \\ 1 & \frac{5/4 + a^2 + a}{a+1} & 0 \\ 0 & \frac{5a}{4} & 0 \end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se

$$\begin{cases} a+1 > 0 \\ 5/4 + a^2 + a > 0 \\ a > 0. \end{cases}$$

È immediato verificare che tali condizioni sono verificate simultaneamente se e solo se $a > 0$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < a$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 + as}{s^3 + (a+1)s^2 + \left(\frac{5}{4} + a\right)s + \frac{5a}{4}} = \frac{s(s+a)}{s^3 + (a+1)s^2 + \left(\frac{5}{4} + a\right)s + \frac{5a}{4}}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri: uno in $-a$ ed uno in 0, zeri che diventano coincidenti (e collocati in 0) per $a = 0$. Consideriamo prima il caso $a = 0$. Per tale valore del parametro a si trova

$$W(s) = \frac{s^2}{s^3 + s^2 + \frac{5}{4}s} = \frac{s}{s^2 + s + \frac{5}{4}}.$$

Pertanto, per la regola dei segni di Cartesio, possiamo dire che il sistema è BIBO stabile.

Consideriamo ora il caso $a \neq 0$ e valutiamo per quali valori di a lo zero in $-a$ si semplifica con il polinomio al denominatore. Ciò si verifica se e solo se

$$d(a) = -a^3 + (a+1)a^2 - \left(\frac{5}{4} + a\right)a + \frac{5a}{4} = 0,$$

ed è immediato verificare che ciò accade per ogni valore di a . Ciò significa che $(s + a)$ divide sempre il polinomio $s^3 + (a + 1)s^2 + \left(\frac{5}{4} + a\right)s + \frac{5a}{4}$. Di fatto si trova

$$s^3 + (a + 1)s^2 + \left(\frac{5}{4} + a\right)s + \frac{5a}{4} = (s + a)\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)$$

e pertanto

$$W(s) = \frac{s}{s^2 + s + \frac{5}{4}},$$

il che assicura che la funzione di trasferimento del sistema sia sempre priva di poli a parte reale maggiore o uguale a zero e quindi il sistema è BIBO stabile per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$.

ii) [4 punti] Per $a = 0$ l'equazione caratteristica del sistema risulta

$$0 = s^3 + s^2 + \frac{5}{4}s = s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right).$$

Di conseguenza gli zeri dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 0$ con molteplicità $\mu_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + j$ con $\mu_2 = 1$ e, infine, $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - j$ con $\mu_3 = 1$. A questi tre zeri semplici possiamo associare tre modi reali $1, e^{-t/2} \cos t, e^{-t/2} \sin t$. Pertanto la generica evoluzione libera è

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-t/2} \cos t + c_3 e^{-t/2} \sin t,$$

ed essa è di tipo sinusoidale smorzata se e solo se $c_1 = 0$. Se partiamo, quindi, da

$$y_\ell(t) = c_2 e^{-t/2} \cos t + c_3 e^{-t/2} \sin t,$$

e calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{dy_\ell(t)}{dt} &= -\frac{1}{2}e^{-t/2}[c_2 \cos t + c_3 \sin t] + e^{-t/2}[-c_2 \sin t + c_3 \cos t], \\ \frac{d^2 y_\ell(t)}{dt^2} &= \frac{1}{4}e^{-t/2}[c_2 \cos t + c_3 \sin t] - e^{-t/2}[-c_2 \sin t + c_3 \cos t] + e^{-t/2}[-c_2 \cos t - c_3 \sin t], \end{aligned}$$

osserviamo che la condizioni iniziali devono soddisfare i seguenti vincoli

$$y(0^-) = c_2, \quad \frac{dy(0^-)}{dt} = -\frac{1}{2}c_2 + c_3, \quad \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = -\frac{3}{4}c_2 - c_3.$$

iii) [3 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s}{s^2 + s + \frac{5}{4}}.$$

D'altra parte, la trasformata di Laplace di un'uscita di tipo puramente esponenziale è

$$Y_f(s) = \frac{1}{s - \lambda}.$$

Poiché

$$U(s) = \frac{Y_f(s)}{W(s)} = \frac{s^2 + s + \frac{5}{4}}{s(s - \lambda)},$$

ne consegue che scegliendo, ad esempio, $\lambda = -1$, e quindi

$$U(s) = \frac{Y_f(s)}{W(s)} = \frac{s^2 + s + \frac{5}{4}}{s^2 + s} = 1 + \frac{5/4}{s} - \frac{5/4}{s+1},$$

che corrisponde a

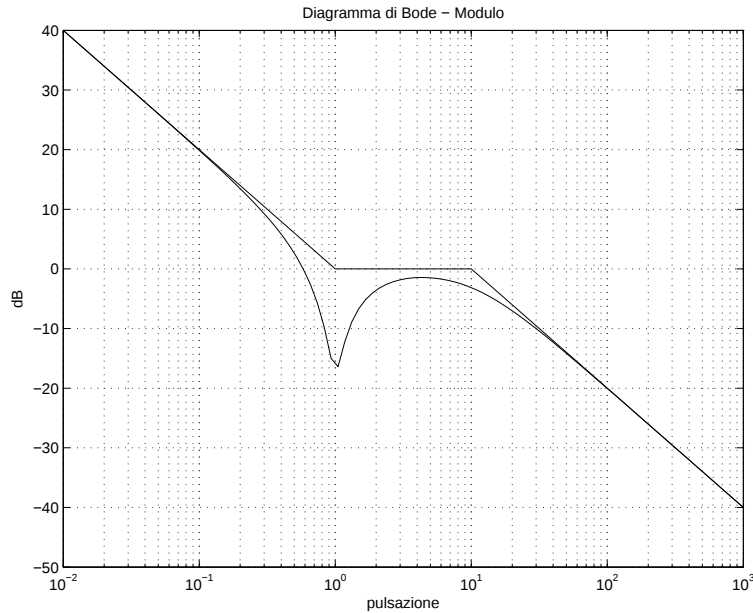
$$u(t) = \delta(t) + \frac{5}{4}[1 - e^{-t}]\delta_{-1}(t),$$

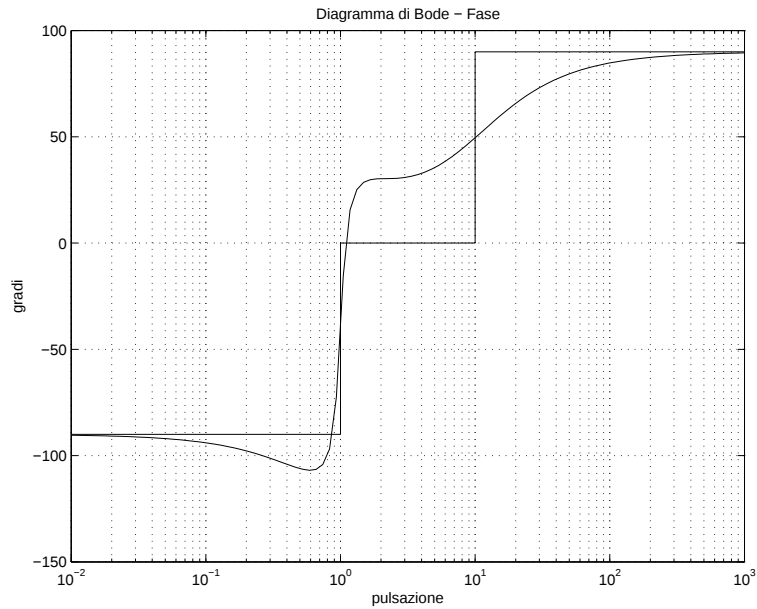
si perviene al risultato desiderato.

Esercizio 2. i) [4.5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = -10 \frac{(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s+1)(s-10)} = \frac{(s^2 + 0.2s + 1)}{s(s+1)(1 - \frac{s}{10})}.$$

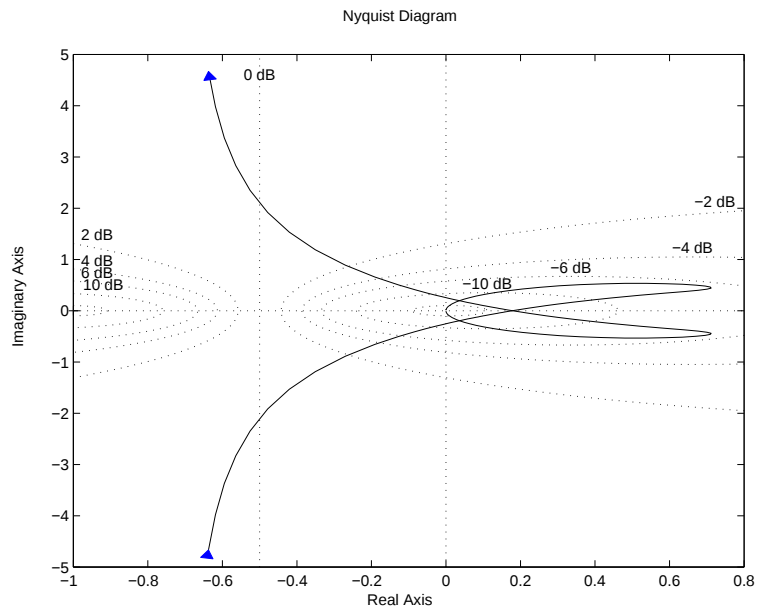
Pertanto $K_B = 1$ e la risposta in frequenza presenta un polo reale negativo con $1/T_1 = 1$ e $\mu_1 = 1$, un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), un polo reale positivo con $1/T_2 = -10$ e $\mu_2 = 1$ e un termine trinomio al numeratore corrispondente a due zeri complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento $\xi = 1/10 = 0.1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





Si noti che la presenza di due termini con punto di spezzamento 1 ma diverso andamento delle fasi provoca uno strano fenomeno in corrispondenza a $\omega = 1$ rad/sec.

ii) [5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza $G(j\omega)$ è disegnato in figura:



$G(s)$ ha un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$. Riportando il diagramma di Nyquist al finito, attraverso il percorso di Nyquist modificato, si trova $N = 0$; ne consegue che $n_{W+} = 1$ e pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo a parte reale positiva.

Esercizio 3. [4.5 punti] Con semplici calcoli si verifica che la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema retroazionato è data da

$$W(s) = \frac{C_{PI}(s)G(s)}{1 + C_{PI}(s)G(s)} = \frac{K_i \left(\frac{sK_p}{K_i} + 1 \right)}{s^2 + (10 + K_p)s + K_i}.$$

Tale funzione di trasferimento presenta poli “stabili” (ovvero a parte reale negativa) se e solo se

$$\begin{cases} 10 + K_p > 0, \\ K_i > 0. \end{cases}$$

Inoltre, tale funzione presenta uno zero instabile se e solo se $K_p/K_i < 0$ e, tenuto conto del fatto che K_i deve essere positivo, quest’ultimo vincolo si riscrive come $K_p < 0$. Infine, affinché i poli della $W(s)$ siano complessi coniugati occorre e basta che il discriminante del polinomio al denominatore sia negativo, ovvero

$$(10 + K_p)^2 - 4K_i < 0.$$

Riassumendo, le condizioni che i parametri K_p e K_i del controllore devono soddisfare sono le seguenti:

$$\begin{cases} -10 < K_p < 0 \\ (10 + K_p)^2 < 4K_i. \end{cases}$$

Tra le possibili soluzioni una è, ad esempio,

$$K_p = -9, \quad K_i = 1.$$

Teoria. [4.5 punti] Si veda il Capitolo 8 del libro di testo, pagine 200-201.