COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
18 Settembre 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (a+1)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{5}{4}+a\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{5a}{4}y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + a\frac{du(t)}{dt},$$

dove a è un parametro reale.

i) [4 punti] Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$,

ii) [4 punti] si determini, in corrispondenza a quali terne di condizioni iniziali $\left(y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \frac{d^2y(0^-)}{dt^2}\right)$, l'evoluzione libera del sistema è di tipo sinusoidale smorzato, con ciò intendendo che è del tipo

$$y_\ell(t) = Ae^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi), \qquad t \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente, del tipo

$$y_\ell(t) = Be^{\sigma t}\sin(\omega t + \psi), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $\sigma < 0, \omega \neq 0$.

iii) [3 punti] si determini, se esiste, un ingresso causale $u(t)$ a cui corrisponda un'uscita in evoluzione forzata di tipo puramente esponenziale, ovvero $y_f(t) = e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$, $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$. [Suggerimento: si ricorra alle trasformate di Laplace].

Esercizio 2. Con riferimento al sistema ingresso/uscita di funzione di trasferimento

$$G(s) = -10\,\frac{(s^2+0.2s+1)}{s(s+1)(s-10)},$$

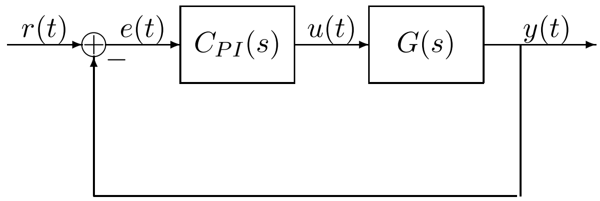
i) [4.5 punti] si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$, del sistema, e, a partire da esso,

ii) [5.5 punti] si tracci il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, del sistema, e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. [4.5 punti] Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s+10}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore PI

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \in \mathbb{R}(s)$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato, di funzione di trasferimento $W(s)$, soddisfi ai seguenti requisiti:

1) sia BIBO stabile;
2) la risposta impulsiva del sistema sia combinazione lineare di due modi sinusoidali smorzati;
3) la $W(s)$ presenti uno zero instabile.

Teoria. [4.5 punti] Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Supponendo note le caratterizzazioni di tipo 0 e di tipo 1 in termini di $W(0)$ e $\frac{dW(0)}{ds}$, si dimostri che, nel caso in cui $W(s)$ sia la funzione di trasferimento di un sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa di un sistema di funzione di trasferimento $G(s)$, il tipo del sistema (0 o 1) coincide con la molteplicità del polo in 0 della $G(s)$.