

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

9 Gennaio 2008

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + (2-a)\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2(1-a)\frac{dy(t)}{dt} - 2ay(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} - \frac{du(t)}{dt}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in \mathbb{R} .

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 1$ e detta $G(s)$ la funzione di trasferimento del sistema così ottenuto,

- ii) si determini la risposta impulsiva del sistema, $g(t)$;
- iii) si determini l'espressione dell'evoluzione forzata del sistema in corrispondenza alla sollecitazione di ingresso

$$u(t) = \delta(t) + [2 \cos t + \sin t]\delta_{-1}(t);$$

- iv) supponendo di applicare un'azione di controllo puramente proporzionale $C(s) = K$, $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nella catena di azione diretta, si studi al variare di K la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, facendo uso della famiglia dei diagrammi di Nyquist di $K \cdot G(j\omega)$ (parametrizzata su K).

Esercizio 2. Consideriamo il sistema lineare e tempo invariante e causale, a tempo discreto, descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) + 2ay(t-1) + a^2y(t-2) = u(t) - u(t-1), \quad t \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a è un parametro reale. Si determini, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'espressione dei modi del sistema e la risposta impulsiva del sistema.

Esercizio 3. Si consideri il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+\sqrt{10})^2}.$$

Si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato

- a) sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa unitaria) all'incirca 0.1;
- b) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 20$ rad/sec;
- c) abbia margine di fase pari almeno a 45° .

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti, definire il concetto di risposta in frequenza del sistema ed esprimerla in termini dei coefficienti coinvolti nell'equazione differenziale descrittiva il sistema. Derivarne, infine, la forma di Bode a partire da una sua rappresentazione fattorizzata che ne evidenzia poli e zeri.

RISULTATI

Esercizio 1. i) [5 punti] Applicando il criterio di Routh si dimostra facilmente che il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $a < 0$, mentre è BIBO stabile se e solo se $a \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 1$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$G(s) = \frac{s^2 - s}{(s-1)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{s}{(s+1)^2 + 1} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1}.$$

Pertanto l'antitrasformata di $G(s)$ è

$$g(t) = [\cos t - \sin t]e^{-t} \delta_{-1}(t).$$

iii) [3 punti] Si trova

$$U(s) = 1 + 2\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 1},$$

da cui

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Pertanto l'antitrasformata di $Y(s)$ è

$$y(t) = \cos t \delta_{-1}(t).$$

iv) [5.5 punti] Per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist andiamo a valutare il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento in catena aperta

$$KG(s) = K \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$$

per valori di K positivi e negativi. Da

$$KG(j\omega) = \frac{K(2\omega^2) + jK\omega(2 - \omega^2)}{4 + \omega^4}$$

segue

$$\operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} = \frac{K(2\omega^2)}{4 + \omega^4} \quad \operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} = \frac{K\omega(2 - \omega^2)}{4 + \omega^4}.$$

Pertanto, posto $\bar{\omega} := \sqrt{2}$, si ha per $K > 0$ e $\omega \geq 0$:

$$\operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} > 0, \quad \forall \omega > 0,$$

e

$$\operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}; \\ < 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}. \end{cases}$$

Invece, per $K < 0$ e $\omega \geq 0$ si ha:

$$\operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} < 0, \quad \forall \omega > 0,$$

e

$$\operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} = \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 < \omega < \bar{\omega}; \\ 0 & \text{per } \omega = \bar{\omega}; \\ > 0 & \text{per } \omega > \bar{\omega}. \end{cases}$$

Per $\omega = \bar{\omega}$

$$\operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} = \frac{K}{2} = \begin{cases} > 0 & \text{se } K > 0; \\ < 0 & \text{se } K < 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} = 0.$$

Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \rightarrow 0^+$ e $\omega \rightarrow +\infty$, di $\operatorname{Re}\{KG(j\omega)\}$ e $\operatorname{Im}\{KG(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} &= \operatorname{sgn}(K) \cdot 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} &= \operatorname{sgn}(K) \cdot 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}\{KG(j\omega)\} &= \operatorname{sgn}(K) \cdot 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}\{KG(j\omega)\} &= -\operatorname{sgn}(K) \cdot 0. \end{aligned}$$

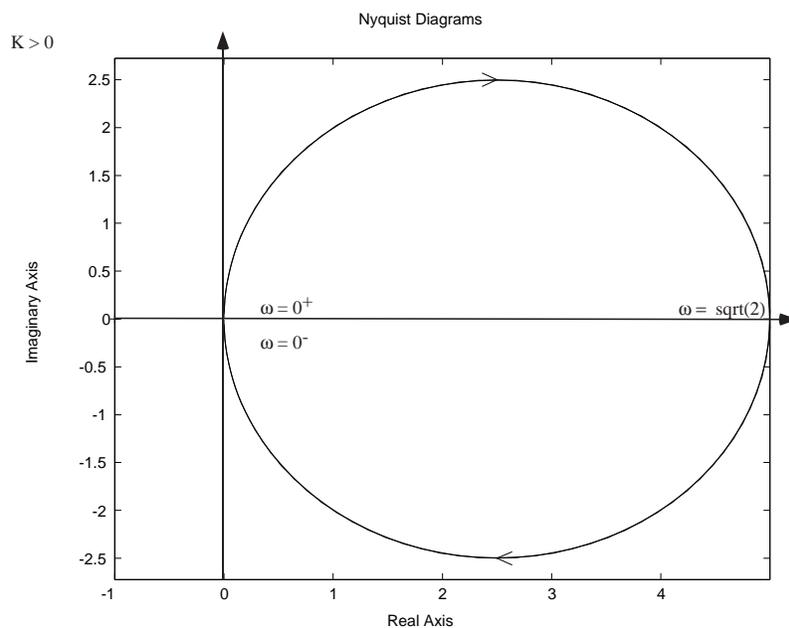
Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo facilmente renderci conto del fatto che

$$\arg KG(j\omega) = \arg(K) + \arg(j\omega) - \arg\left((2 - \omega^2) + j2\omega\right).$$

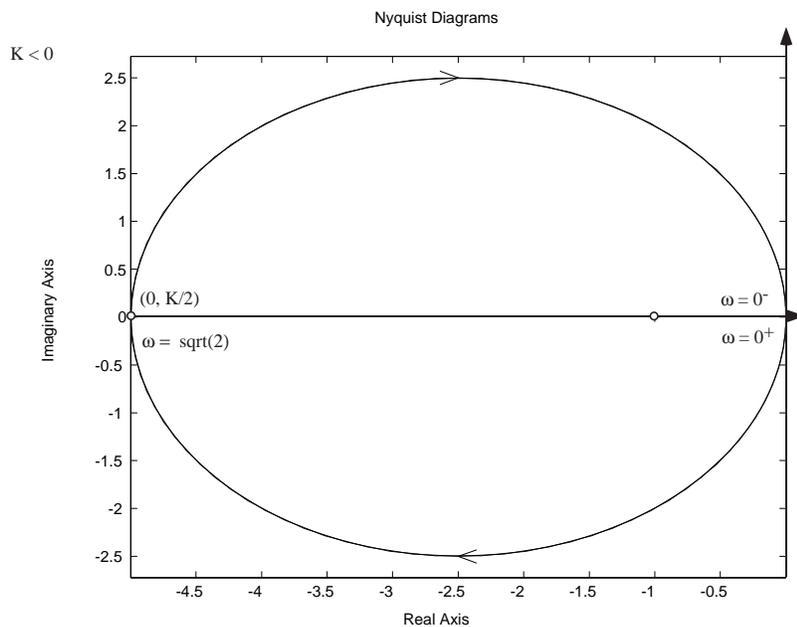
Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} 90^\circ & \text{se } K > 0; \\ -90^\circ & \text{se } K < 0; \end{cases} \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= \begin{cases} -90^\circ & \text{se } K > 0; \\ 90^\circ & \text{se } K < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Tenuto conto del fatto che il comportamento per $\omega < 0$ si trova per simmetria, rovesciando la porzione di diagramma relativa a pulsazione non negative, il diagramma di Nyquist di $KG(j\omega)$ risulta, pertanto, illustrato per $K > 0$ (precisamente per il valore $K = 10$) in



e per $K < 0$ (per $K = -10$) in



In entrambi i casi, i diagrammi sono due cerchi che vengono percorsi, al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$ due volte in verso orario.

Risulta allora evidente, dal primo diagramma, che per ogni $K > 0$ $N = 0$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è sempre BIBO stabile.

Nel caso del secondo diagramma, invece, è evidente che per ogni $K < -2$, $N = -2$ ed essendo $n_{G+} = 0$ ne consegue $n_{W+} = 2$. Inoltre, nel caso particolare $K = -2$, il passaggio per il punto critico $-1 + j0$ assicura la presenza di un polo a parte reale nulla che preclude la stabilità BIBO. Il ricorso ad un percorso di Nyquist modificato evidenzia come oltre al polo a parte reale nulla non ci siano altri poli instabili. Pertanto il sistema retroazionato è instabile per $K \leq -2$. Per $-2 < K < 0$, invece $N = 0$ e il sistema è BIBO stabile.

Esercizio 2. [4.5 punti] Equazione caratteristica:

$$0 = z^2 + 2az + a^2 = (z + a)^2$$

con uno zero di molteplicità 2 collocato in $-a$. I modi elementari sono

- per $a \neq 0$, $(-a)^t, t \cdot (-a)^t$;
- per $a = 0$, $\delta(t + 1), \delta(t + 2)$.

Per quanto concerne la risposta impulsiva

- per $a \neq 0$, essa ha la forma

$$w(t) = w(0)\delta(t) + [d_1(-a)^t + d_2t \cdot (-a)^t]\delta_{-1}(t - 1).$$

Sfruttando le espressioni di $w(0), w(1)$ e $w(2)$ che si ottengono dalla valutazione effettiva dell'equazione alle differenze per $u(t) = \delta(t)$ a partire da condizioni iniziali nulle, si trova

$$w(t) = \delta(t) + \left[(-a)^t + \frac{a+1}{a}t \cdot (-a)^t\right] \delta_{-1}(t-1) = \left[(-a)^t + \frac{a+1}{a}t \cdot (-a)^t\right] \delta_{-1}(t).$$

Si noti che per $a = -1$ compare solo un modo nell'espressione della risposta impulsiva.

- per $a = 0$, l'equazione alle differenze descrittiva il sistema diventa

$$y(t) = u(t) - u(t - 1),$$

da cui è immediato desumere che per $u(t) = \delta(t)$, $y(t) = w(t) = \delta(t) - \delta(t - 1)$.

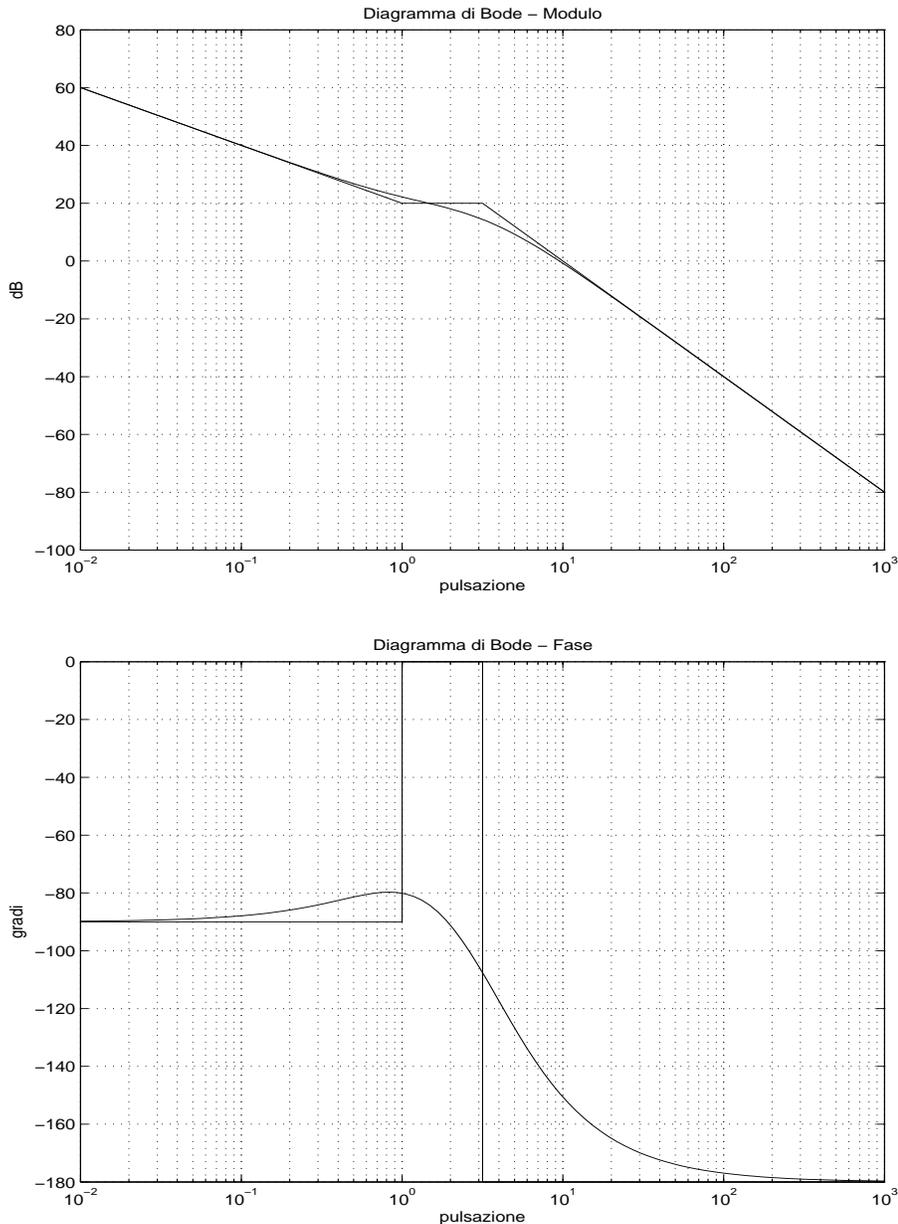
Esercizio 3. [5 punti] Poichè viene richiesto che il tipo del sistema sia 1 è sufficiente introdurre un polo semplice nell'origine attraverso il controllore. Provvediamo, ora, ad attribuire al guadagno di Bode del controllore un valore che assicuri il rispetto del vincolo sull'errore di regime permanente. Poichè è noto che l'errore di regime permanente di un sistema di tipo 1 è espresso dalla formula

$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)K_B(G)},$$

dove $K_B(C)$ e $K_B(G)$ rappresentano, rispettivamente, il guadagno di Bode del controllore e del processo, il vincolo su $K_B(C)$ diventa

$$\frac{1}{K_B(C)K_B(G)} = \frac{1}{0.1K_B(C)} \approx 0.1.$$

Da ciò segue $K_B(C) \approx 100$. Scegliamo allora, preliminarmente, $C'(s) = \frac{K_B(C)}{s} = \frac{100}{s}$ e andiamo a valutare pulsazione di attraversamento e margine di fase per la funzione di trasferimento in catena aperta $C'(s)G(s) = 10 \frac{1+s}{s \left(1 + \frac{s}{\sqrt{10}}\right)^2}$. Graficamente si trova



ed è immediato rendersi conto del fatto che la pulsazione ω_A si trova esattamente in corrispondenza a 10 rad/s. Il calcolo dell'ampiezza (in dB) di $C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)$ fornisce approssimativamente -12 dB, mentre il margine di fase in corrispondenza alla pulsazione $\omega_A^* = 20$ rad/sec è circa 15° . Per compensare il fatto che $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* := 45^\circ$ possiamo utilizzare un'azione attenuatrice:

$$C_{\text{att}}(s) = \frac{1 + sT}{1 + sT}.$$

Dalla tabella si ricava che valori accettabili per α e u sono, rispettivamente, $\alpha = 0.18$ e $u = \omega_A^* T = 6$ (che corrisponde a $T = 0.3$). In tal modo si ha un incremento di ampiezza esattamente pari a 12 dB e un incremento di fase leggermente inferiore a 30° . Si trova, pertanto,

$$C_{\text{att}}(s) = \frac{1 + 0.3s}{1 + (0.3 \cdot 0.18)s}$$

e quindi

$$C(s) = \frac{K_B(C)}{s} C_{\text{att}}(s) = 10 \frac{1 + 0.3s}{s(1 + (0.3 \cdot 0.18)s)}.$$

Teoria. [3.5 punti] Si veda il Capitolo 5 del Libro di testo.