COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
20 Giugno 2008 - TEMA A

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (a+1)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (2+a)\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - u(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 2$,

ii) si determini, se esiste, l'ingresso sinusoidale causale $u(t)$ a cui corrisponde l'uscita (forzata) di regime permanente

$$y_{rp}(t) = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right);$$

iii) si determini l'espressione della risposta al gradino del sistema.
[Suggerimento: si verifichi la possibilità di semplificazioni nell'espressione di $W_{-1}(s)$.]

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = \frac{(s-1)(s^2+2s+100)}{s^2(s+10)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

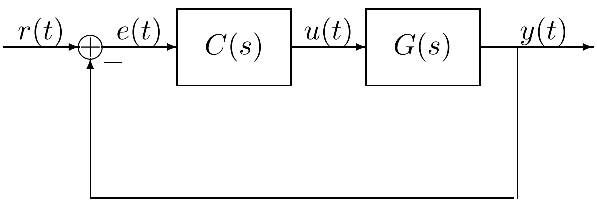
i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+10}{s^2+2s+100}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$, razionale proprio, in modo tale che

1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa unitaria) pari a 0.1;

2) la funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)C(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 10^3$ rad/sec e margine di fase almeno pari a 80°.

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti, si definiscano i concetti di stabilità asintotica e di stabilità BIBO e si dimostri, operando sia nel dominio del tempo che nel dominio delle trasformate di Laplace, che la stabilità asintotica implica la stabilità BIBO.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + (a+1)s^2 + (2+a)s + 2.$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2+a \\ 2 & a+1 & 2 \\ 1 & \dfrac{3a+a^2}{a+1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $a+1 > 0$ e $a(3+a) > 0$. Ciò si verifica se e solo se $a > 0$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $a > 0$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + (a+1)s^2 + (2+a)s + 2}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri collocati in ± 1. Per questa ragione l'unica semplificazione di interesse tra numeratore e denominatore è quella relativa allo zero in 1 ed essa si verifica se e solo se per qualche valore di a il polinomio al denominatore si annulla in 1. In altre parole se e solo se per qualche valore di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 = \left. s^3 + (a+1)s^2 + (2+a)s + 2 \right|_{s=1} = 2a + 6. \tag{1}$$

Si vede subito che la precedente identità è soddisfatta se e solo se $a = -3$. Per tale valore di a, $d(s)$ diventa $s^3 - 2s^2 - s + 2$ che fattorizza nella forma

$$s^3 - 2s^2 - s + 2 = (s-1)\left(s^2 - s - 2\right).$$

Di conseguenza

$$W(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{s^3 - 2s^2 - s + 2} = \frac{(s-1)(s+1)}{(s-1)(s^2 - s - 2)} = \frac{s+1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{s-2}.$$

Ne consegue, visto che abbiamo a che fare con una rappresentazione irriducibile ed il polinomio al denominatore non è di Hurwitz, che il sistema non è BIBO stabile per $a = -3$ e pertanto si ha BIBO stabilità se e solo se $0 < a$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 2$ sappiamo già, dal punto precedente, che il sistema è asintoticamente stabile e BIBO stabile, quindi esiste la risposta di regime permanente ad ogni segnale sinusoidale. Dalla teoria sappiamo che al segnale

$$u(t) = A\sin(\omega t + \phi)\delta_{-1}(t)$$

il sistema risponde a regime permanente con

$$y_{rp}(t) = |W(j\omega)|A\sin(\omega t + \phi + \arg(W(j\omega)).$$

Ora, nel nostro caso, $\omega = 2$ rad/sec,

$$\begin{aligned} |W(j2)|A &= 2 \\ \phi + \arg(W(j2)) &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Si tratta quindi di capire, una volta determinati $|W(j2)|$ e $\arg(W(j2))$, quali siano i valori di A e ϕ. Ora, per $a = 2$, la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2},$$

la corrispondente risposta in frequenza alla pulsazione $\omega = 2$ rad/sec vale

$$W(j2) = \frac{-4 - 1}{-j8 - 3 \cdot 4 + j4 \cdot 2 + 2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto devono valere le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= 2 \\ \phi + 0 &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$u(t) = 4\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\delta_{-1}(t).$$

iii) [3.5 punti] Come abbiamo già visto, per $a = 2$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2},$$

mentre la trasformata di Laplace del gradino è

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

e quindi la trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$Y_f(s) = W_{-1}(s) = W(s)U(s) = \frac{s^2 - 1}{s(s^3 + 3s^2 + 4s + 2)}.$$

Seguendo il suggerimento, andiamo a cercare possibili cancellazioni. Al numeratore ci sono solo due fattori: $s - 1$ e $s + 1$. Sapendo che la cancellazione del fattore $s - 1$ era possibile solo per $a = -3$, andiamo a verificare se è possibile semplificare il fattore $s+1$. Di fatto, è immediato rendersi conto del fatto che il termine di terzo grado, s^3+3s^2+4s+2, si annulla per $s=-1$, infatti

$$s^3+3s^2+4s+2\Big|_{s=-1} = -1+3-4+2 = 0.$$

Pertanto si trova facilmente

$$s^3+3s^2+4s+2 = (s+1)(s^2+2s+2)$$

e quindi si ha

$$W_{-1}(s) = \frac{s-1}{s(s^2+2s+2)}.$$

La decomposizione in fratti semplici porta a

$$W_{-1}(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s+4}{s^2+2s+2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1^2}.$$

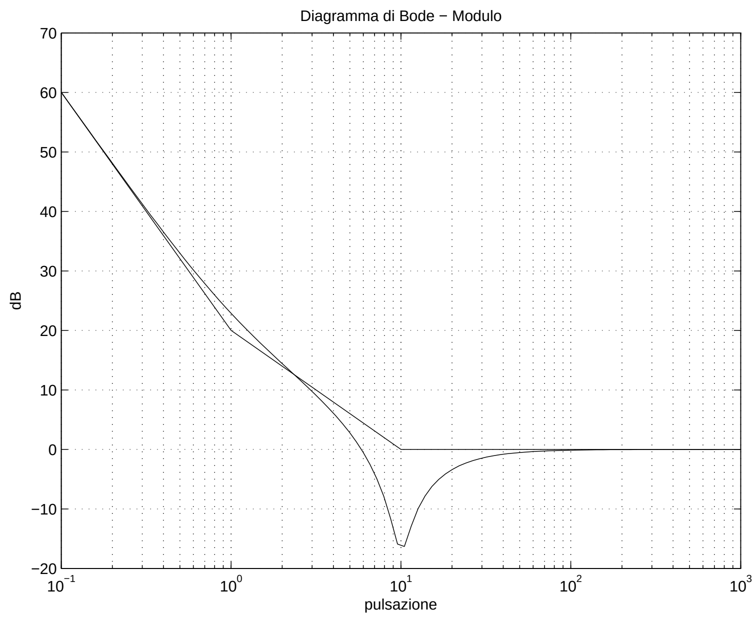
Da ciò segue

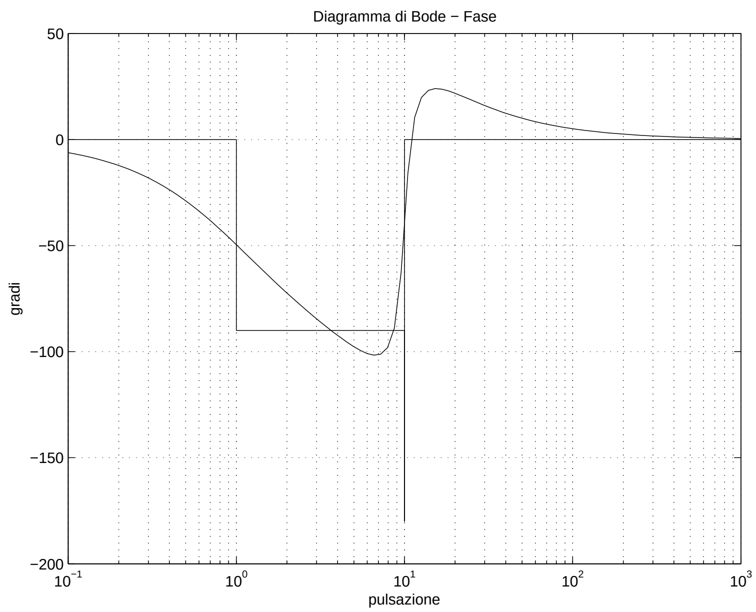
$$w_{-1}(t) = \frac{1}{2}\left[-1+e^{-t}\cos t + 3e^{-t}\sin t\right]\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

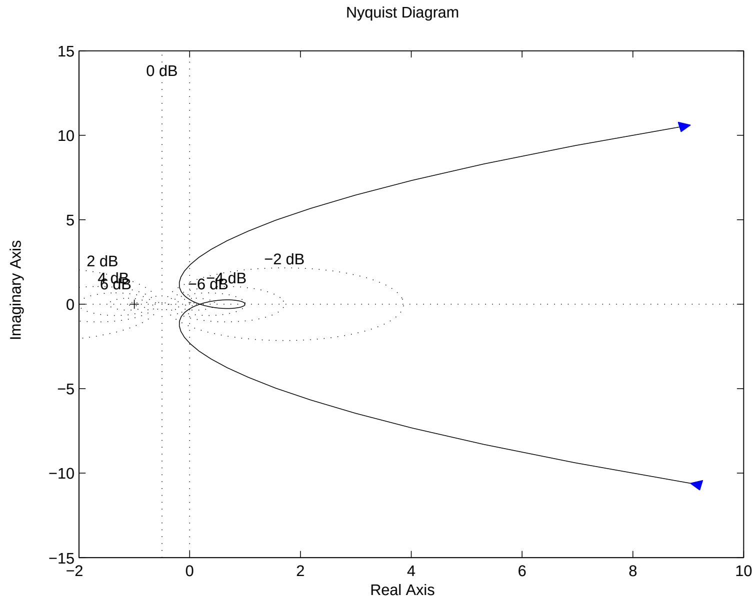
$$G(s) = -10\frac{(1-s)\left(1+2\frac{1}{10}\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}\right)}{s^2(1+0.1s)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale positivo con $1/T_1' = -1$ e $\mu_1' = 1$, un termine trinomio al numeratore corrispondente a due zeri complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n' = 10$ e smorzamento $\xi' = 1/10 = 0.1$, un polo doppio nell'origine ($\nu = 2$), un polo reale negativo semplice con $1/T = 10$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [5.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



$G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$. Riportando il diagramma di Nyquist al finito, attraverso il percorso di Nyquist modificato (un angolo giro in verso orario dal ramo alto del diagramma al ramo basso), si trova $N = -1$ e quindi $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo a parte reale positiva.

Esercizio 3. [5 punti] Poiché $G(s)$ non ha poli in 0, per rendere il sistema in catena chiusa di tipo 1 devo introdurre un polo nell'origine di molteplicità unitaria. Scelgo, quindi, un precompensatore $C'(s)$ del tipo

$$C'(s) = \frac{K_B(C')}{s},$$

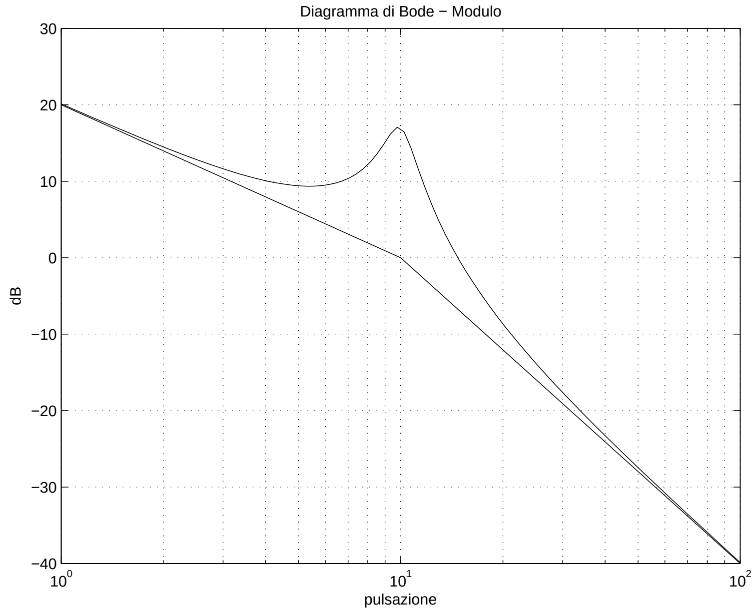
dove $K_B(C')$ verrà scelto in modo da soddisfare il vincolo sull'errore di regime permanente

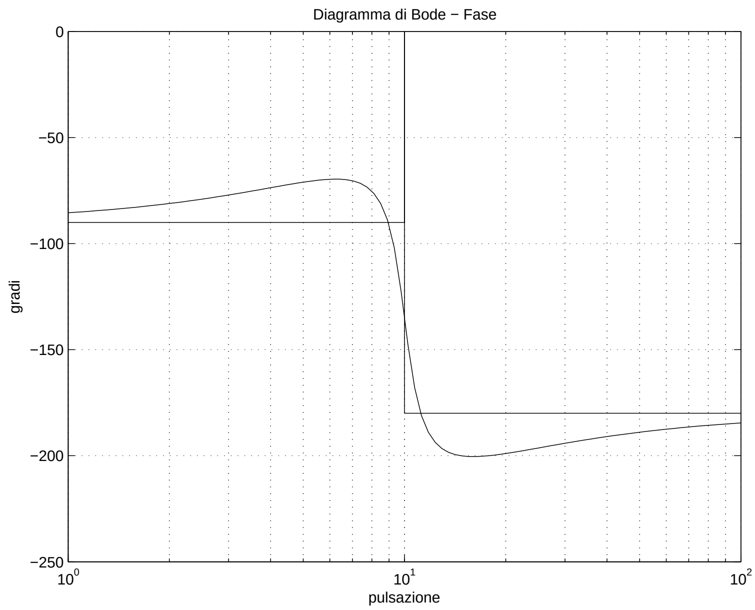
$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(G)K_B(C')} = \frac{1}{0.1K_B(C')} \approx 0.1,$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode di $G(s)$ (in questo caso di valore 0.1). Si trova quindi $K_B(C') \approx 10^2$. Assumiamo nel seguito $K_B(C') = 10^2$. La funzione di trasferimento del sistema in catena aperta diventa allora

$$C'(s)G(s) = 10\frac{1+\frac{s}{10}}{s\left(1+2\frac{1}{10}\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}\right)}.$$

Tracciamone il diagramma di Bode di ampiezza e fase





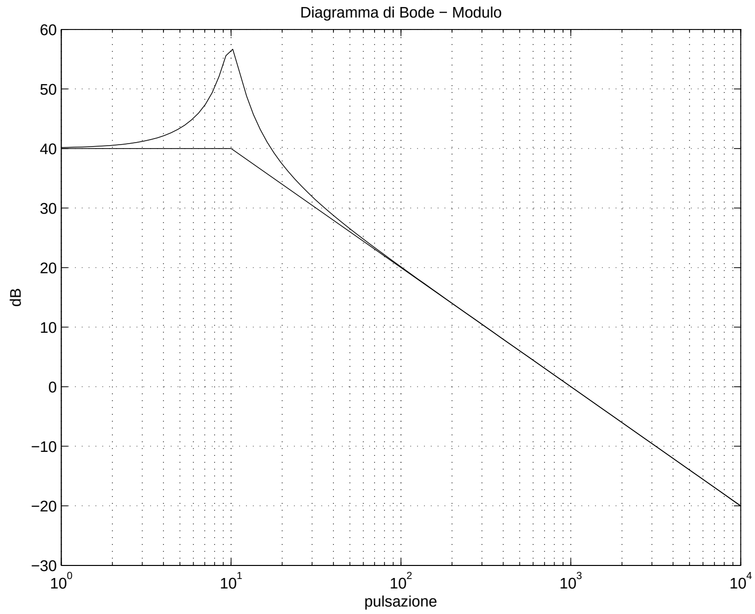
È immediato rendersi conto del fatto che ω_A è leggermente superiore a 10 rad/sec (di fatto si tratta di un valore compreso tra 10 e 20 rad/sec), mentre $m_\psi(\omega_A^*) \approx 0°$. È quindi necessario ricorrere ad una rete anticipatrice. Procedendo "ad occhio", si trova che un modo semplice per conseguire gli obiettivi su pulsazione di attraversamento e margine di fase consiste nell'inserire uno zero in corrispondenza alla pulsazione 10^{-1} rad/sec e successivamente un polo ad una pulsazione maggiore di quella di attraversamento (ad esempio in -10^5 rad/sec). Ciò equivale ad assumere

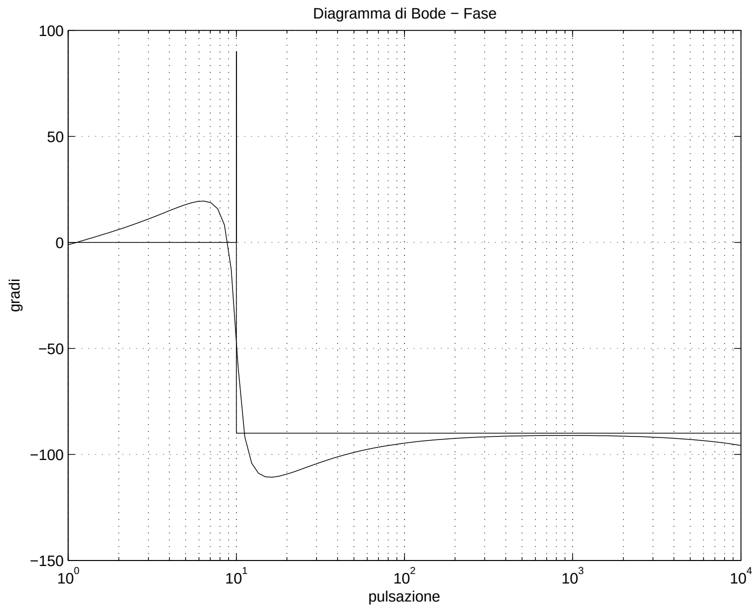
$$C''(s) = \frac{1 + 10s}{1 + 10^{-5}s}$$

e quindi il controllore finale è

$$C(s) = C'(s)C''(s) = 100\frac{1+10s}{s(1+10^{-5}s)}.$$

Allo scopo di verifica si traccia qui di seguito il diagramma della funzione di trasferimento in catena aperta finale, $C(s)G(s)$:





Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 4, paragrafo 4.1, del Libro di testo (seconda edizione).