COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
15 Luglio 2008

Esercizio 1. Si consideri il modello di stato a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= F\mathbf{x}(t) + Gu(t) &&= \begin{bmatrix} a-1 & 1 \\ -1 & 1-2a \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= H\mathbf{x}(t) &&= [\,0 \quad 1\,]\,\mathbf{x}(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,
\end{aligned}
$$

con a parametro reale.

i) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la struttura della forma di Jordan della matrice F e si studino stabilità semplice, asintotica e BIBO del sistema.
[Nota bene: ai fini della stabilità e del calcolo della struttura della forma di Jordan non è richiesto il calcolo esplicito delle radici per ogni valore di a].

ii) Assumendo $a = 1$, si determini, se possibile, un controllore in retroazione che attribuisca al risultante sistema retroazionato la funzione di trasferimento $W_K(s) = \frac{1}{s+1}$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto Σ:

$$
\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + [\,g_1 \quad g_2\,]u(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t).
$$

i) Agendo solo sul primo ingresso, si determini, se esiste, un ingresso di controllo che porti lo stato del sistema da $\mathbf{x}_0 = [\,1 \quad 0 \quad -1\,]^T$ a $\mathbf{x}_f = [\,1 \quad 0 \quad -3\,]^T$ nel minimo numero di passi.

ii) Agendo solo sul secondo ingresso, si determini, se esiste, una matrice di retroazione k_2 tale che l'evoluzione libera del sistema retroazionato $\Sigma_{k_2} = (F + g_2 k_2, g_2)$ presenti un unico modo elementare, per qualsiasi condizione iniziale $x(0)$.

iii) Agendo su entrambi gli ingressi e facendo uso di una pre-retroazione che sfrutti il Lemma di Heymann, si determini, se possibile, un controllore deadbeat K per il sistema Σ.

Esercizio 3. Dato il sistema a tempo continuo:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]\,x(t),
\end{aligned}
$$

i) si progetti, se possibile, uno stimatore il cui errore di stima converga, per $t \to +\infty$ come e^{-t};

ii) si progetti, se possibile, un regolatore asintotico.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui l'ingresso di controllo/lo stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Dato un modello di stato a tempo continuo, tempo invariante,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{y}(t) &= h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \end{aligned}$$

si definisca il concetto di punto di equilibrio del sistema in corrispondenza ad un ingresso costante e si illustri il processo di linearizzazione del sistema attorno al punto di equilibrio e le ipotesi necessarie per poter effettuare la linearizzazione.

Illustrare, poi, le sole differenze che emergono passando dal continuo al discreto, sia per quanto riguarda la definizione e/o caratterizzazione dei punti di equilibrio ad ingresso costante, sia per quanto riguarda la linearizzazione.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4.5 punti] Il polinomio caratteristico del sistema è

$$\Delta_F(s) = \det \begin{bmatrix} s-a+1 & -1 \\ 1 & s-1+2a \end{bmatrix} = (s-a+1)(s-1+2a)+1 = s^2+as+(3a-2a^2).$$

In base alla regola dei segni di Cartesio, tale polinomio è di Hurwitz (e quindi il sistema risulta asintoticamente stabile) se e solo se

$$\begin{cases} a & > & 0 \\ 3a-2a^2 & > & 0, \end{cases}$$

che si verifica se e solo se $0 < a < \frac{3}{2}$. Al di fuori di questo intervallo di valori possiamo avere al più stabilità semplice. Specificatamante, per $a < 0$ o $a > \frac{3}{2}$ abbiamo instabilità. Se $a = 0$ il polinomio caratteristico diventa s^2 ed ha due radici in 0. D'altra parte la matrice F diventa

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e non essendo essa la matrice nulla è chiaro che l'unica forma di Jordan che essa può presentare è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo quindi instabilità.

Per $a = \frac{3}{2}$, invece, il polinomio caratteristico diventa $s^2 + \frac{3}{2}s$ ed ha una radice in 0 e l'altra reale negativa. Pertanto abbiamo stabilità semplice.

Prima di passare alla valutazione della stabilità BIBO, consideriamo la forma di Jordan che F presenta al variare di a. Fintanto che gli autovalori sono distinti, la forma di Jordan di F sarà diagonale con gli autovalori sulla diagonale ovvero del tipo

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

con λ_1, λ_2 radici reali o complesse distinte. Si tratta invece di andare a vedere cosa succede quando le radici del polinomio caratteristico sono coincidenti. Ciò si verifica se e solo se il discriminante del polinomio caratteristico risulta nullo. Ora il discriminante del polinomio in questione è dato da:

$$a^2 - 4(3a-2a^2) = 9a^2 - 12a = 3a(3a-4),$$

che si annulla se e solo se $a = 0$ oppure $a = \frac{4}{3}$. Il caso $a = 0$ lo abbiamo già preso in esame. Per $a = \frac{4}{3}$ si trova

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

e $\Delta_F(s) = s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{4}{9} = \left(s + \frac{2}{3}\right)^2$. Anche in questo caso è ovvio che, non essendo la matrice nella forma scalare

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix},$$

la sua forma di Jordan è necessariamente

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Valutiamo ora la stabilità BIBO del sistema. Certamente per i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica si ha pure stabilità BIBO. Vediamo ora se esistono dei valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$W(s) \quad = \quad H(sI_2 - F)^{-1}g = \frac{s - a}{s^2 + as + (3a - 2a^2)}.$$

La rappresentazione risulta non irriducibile se e solo se il polinomio al denominatore si annulla per $s = a$, ovvero se

$$a^2 + a^2 + 3a - 2a^2 = 3a = 0.$$

Chiaramente ciò si verifica se e solo se $a = 0$, ma in tal caso si trova $W(s) = \frac{1}{s}$ che non è BIBO stabile. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se è asintoticamente stabile, ovvero se e solo se $0 < a < \frac{3}{2}$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 1$ la matrice del sistema diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

e la coppia (F, g) risulta raggiungibile, dal momento che la relativa matrice di raggiungibilità è

$$\mathcal{R} = [\, g \quad Fg \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza, possiamo attribuire al polinomio caratteristico del sistema retroazionato una arbitraria coppia di zeri. D'altra parte la funzione di trasferimento del sistema di partenza è (si veda il punto i)):

$$W(s) = \frac{s - 1}{s^2 + s + 1}.$$

Quindi per ottenere $W_K(s) = \frac{1}{s+1}$ occorre e basta imporre che

$$\Delta_{F+gK}(s) = (s - 1)(s + 1) = s^2 - 1.$$

Posto $K = [\, k_0 \quad k_1 \,]$, si trova

$$F + gK = \begin{bmatrix} k_0 & 1 + k_1 \\ k_0 - 1 & k_1 - 1 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\Delta_{F+gK}(s) = (s-k_0)(s-k_1+1) - (1+k_1)(k_0-1) = s^2 + (1-k_1-k_0)s + (1+k_1-2k_0).$$

Imponendo l'uguaglianza con il polinomio desiderato, s^2-1, si trova

$$\begin{cases} 1-k_1-k_0 &= 0 \\ 1+k_1-2k_0 &= -1, \end{cases}$$

da cui $K = [\,k_0 \quad k_1\,] = [\,1 \quad 0\,]$.

Esercizio 2. i) [3 punti] Calcoliamo dapprima i sottospazi di raggiungibilità del sistema (F, g_1). Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^{R,1} &= \mathrm{Im} g_1 = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\
X_2^{R,1} &= \mathrm{Im}\,[\,g_1 \quad Fg_1\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \\
X_3^{R,1} &= \mathrm{Im}\,[\,g_1 \quad Fg_1 \quad F^2 g_1\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \neq \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Pertanto il sistema non è raggiungibile e quindi non è detto che l'azione di controllo in questione sia possibile.

Verifichiamo se è possibile in un passo. L'equazione di evoluzione dello stato in un passo fornisce:

$$\mathbf{x}(1) = F\mathbf{x}(0) + g_1 u_1(0)$$

da cui segue che la condizione da verificare è $\mathbf{x}(1) - F\mathbf{x}(0) \in X_1^{R,1}$. Peraltro, poiché $\mathbf{x}_f - F\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \notin X_1^{R,1}$, lo stato $\mathbf{x}_f$ non può essere raggiunto in un passo a partire da $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

L'equazione di evoluzione dello stato in due passi risulta:

$$\mathbf{x}(2) = F^2\mathbf{x}(0) + [\,g_1 \quad Fg_1\,]\,[\,u_1(1) \quad u_1(0)\,]$$

e la condizione da verificare $\mathbf{x}(2) - F^2\mathbf{x}(0) \in X_2^R$. In questo caso vale $\mathbf{x}_f - F^2\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in X_2^{R,1}$ e quindi lo stato $\mathbf{x}_f$ può essere raggiunto in due passi a partire da $\mathbf{x}_0$. Il calcolo dell'ingresso di controllo è immediato:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

e porge:

$$\begin{cases} u_1(0) = 1, \\ u_1(1) = -1. \end{cases}$$

ii) [3.5 punti] L'evoluzione libera di stato del sistema retroazionato $\Sigma_{k_2} = (F + g_2 k_2, g_2)$ è in generale una combinazione lineare dei modi di $F + g_2 k_2$: affinché sia presente un unico modo elementare, a prescindere dallo stato iniziale, la forma di Jordan di $F + g_2 k_2$ deve presentare tre miniblocchi di dimensione unitaria relativi al medesimo autovalore e quindi $F + g_2 k_2$ stessa deve essere una matrice diagonale scalare del tipo λI_3, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si verifica facilmente che la coppia (F, g_2) non è raggiungibile, attraverso il calcolo della matrice di raggiungibilità:

$$\mathcal{R}_2 = [\, g_2 \quad F g_2 \quad F^2 g_2 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

che risulta avere rango pari a 2. Si ha pertanto un sottospazio non raggiungibile di dimensione unitaria, a cui rimane associato un unico autovalore. Notando che la matrice F è triangolare superiore, lo spettro del sistema si ottiene rapidamente e risulta pari a $\sigma_F = \{1, -1, 2\}$. Procedendo con il test PBH è possibile calcolare l'autovalore del sistema non raggiungibile. La matrice PBH

$$[\lambda I - F | g_2] = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda - 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & 1 \end{array}\right]$$

scende di rango solo in corrispondenza di $\lambda = 2$, che risulta pertanto essere l'autovalore del sottosistema non raggiungibile. Questo è anche l'unico autovalore non allocabile attraverso retroazione dal secondo ingresso. Di conseguenza, si tratta di valutare se è possibile scegliere un controllore k_2 in modo tale che $F + g_2 k_2 = 2I_3$.

Consideriamo una generica matrice di retroazione $k_2 = [a\ b\ c]$; la matrice di stato del sistema retroazionato $F + g_2 k_2$ risulta:

$$F + g_2 k_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -a & 1 - b & 2 - c \\ a & 1 + b & c \end{bmatrix}.$$

È ora sufficiente notare che non esiste nessuna scelta dei parametri a, b e c che renda possibile l'identità $F + g_2 k_2 = 2I_3$; il controllore richiesto, pertanto, non esiste.

iii) [4 punti] La matrice di raggiungibilità del sistema complessivo risulta

$$\mathcal{R} = [\, g_1 \quad g_2 \quad F g_1 \quad F g_2 \quad F^2 g_1 \quad F^2 g_2 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

e il suo rango è pari a 3. Il sistema è pertanto raggiungibile (mentre è facile verificare che non loè da nessuno dei due ingressi separatamente) e agendo su entrambi gli ingressi è possibile allocare arbitrariamente gli autovalori. In particolare, esiste un controllore dead-beat che corrisponde a richiedere che il polinomio caratteristico del sistema retroazionato sia $p(z) = z^3$, ossia $F + GK$ abbia tutti autovalori nulli.

Per ottenere tale controllore, utilizziamo, come richiesto, il Lemma di Heymann per costruire una matrice M_1 di pre-retroazione che renda il sistema retroazionato $(F + GM_1, G)$ raggiungibile dal solo primo ingresso. Si costruiscono dapprima la matrice Q_1 selezionando in modo oppportuno le colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{R}$, e la matrice S_1 ad essa correlata

$$Q_1 = [\, g_1 \quad Fg_1 \quad g_2 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di pre-retroazione risulta

$$M_1 = S_1 Q_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e operando la pre-retroazione si ottiene

$$F + GM_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema pre-retroazionato risulta raggiungibile dal primo ingresso e attraverso una matrice parametrica $k_1 = [\, a \quad b \quad c \,]$, si ottiene

$$F + GM_1 + g_1 k_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1/2 & 1 & 2 \\ 1/2 + a & 1 + b & c \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico risulta

$$\Delta_{F+GM_1+g_1k_1}(z) = z^3 + (-2 - c)z^2 + (-2a - 2b + 2c - 2)z + (2a + 3b - c + 4).$$

Eguagliando il polinomio caratteristico richiesto $p(z)$ a $\Delta_{F+GM_1+g_1k_1}(z)$, si ottiene

$$k_1 = [\, -3 \quad 0 \quad -2 \,].$$

La matrice di retroazione complessiva risulta:

$$K = M_1 + \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. i) [3.5 punti] La specifica richiesta equivale a chiedere che l'evoluzione (libera) dell'errore di stima $e(t)$, per valori molto grandi di t (e quindi asintoticamente), possa essere descritta ricorrendo al solo modo e^{-t}. In altre parole, è richiesto che i modi di $(F + LH)$ soddisfino i seguenti requisiti:

1. tra di essi ci sia il modo e^{-t};
2. qualsiasi altro modo $m(t)$ sia asintoticamente irrilevante rispetto a e^{-t}, nel senso che

$$\frac{m(t)}{e^{-t}} \to 0 \quad \text{per } t \to \infty,$$

ovvero e^{-t} è il modo dominante.

È immediato verificare che il sistema è in forma standard di osservazione e l'unico autovalore del sottosistema non osservabile è -1. Infatti, le matrici (F, H) partizionate secondo la struttura di forma standard di osservazione evidenziano un sottosistema $(F_{11}, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, [1 \quad 0] \right)$ osservabile, in quanto $\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ha rango pari a 2, e $F_{22} = [-1]$.

Tale situazione è compatibile con le due condizioni richieste per gli autovalori di $F + LH$, in quanto è possibile allocare, ad esempio, entrambi gli autovalori di F_{11} in -2, il che fornisce (tenuto conto del fatto che l'autovalore non allocabile di F_{22} è -1) una possibile soluzione al problema, portando ad uno spettro complessivo pari a

$$\sigma(F + LH) = \{-1, -2, -2\}.$$

In questo modo, infatti si hanno due modi (siano essi entrambi e^{-2t} oppure l'uno e^{-2t} e l'altro te^{-2t}) che convergono a zero prima di e^{-t}, in aggiunta al modo dominante e^{-t}.

Partizionando la matrice L in modo conforme alla forma standard

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ \hline L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \hline \ell_3 \end{bmatrix},$$

il problema è ora di fare in modo che la matrice $F_{11} + L_1 H_1$ presenti due autovalori coincidenti in -2. Si ottiene, con facili calcoli,

$$F_{11} + L_1 H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} \ell_1 & 2 \\ \ell_2 & -1 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava la seguente espressione per il polinomio caratteristico

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(s) = \det \begin{bmatrix} s - \ell_1 & -2 \\ -\ell_2 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 + (1 - \ell_1)s + (-\ell_1 - 2\ell_2).$$

Perchè il polinomio $\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(s)$ sia pari al polinomio desiderato $p(s) = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$ occorre e basta che $\ell_1 = -3$ e $\ell_2 = -\frac{1}{2}$. Il parametro ℓ_3 rimane, invece, completamente libero. Lo stimatore L cercato risulta, quindi,

$$L = \begin{bmatrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \\ \ell_3 \end{bmatrix},$$

con ℓ_3 arbitrario.

ii) [3.5 punti] Per il principio di separazione del regolatore, un regolatore asintotico per il sistema esiste se e solo se

a) esiste K tale che $F + GK$ sia asintoticamente stabile;

b) esiste H tale che $F + LH$ sia asintoticamente stabile.

Per quanto riguarda il punto b), si può semplicemente utilizzare lo stimatore determinato al punto precedente.

Si tratta ora di valutare se esiste un controllore asintotico per il sistema. Valutiamo la raggiungibilità del sistema. La matrice di raggiungibilità risulta

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e ha rango pari a 2. Pertanto il sistema non è completamente raggiungibile. Per capire quale sia l'autovalore del sottosistema non raggiungibile (di dimensione 1) si può ricorrere al criterio PBH di raggiungibilità. In realtà poiché la matrice F ha due autovalori collocati in -1 ed un autovalore in 0, occorre e basta verificare che 0 non sia autovalore del sottosistema non raggiungibile, ovvero che la matrice PBH di raggiungibilità abbia rango pieno in $\lambda = 0$. Il calcolo della matrice PBH porge

$$[\lambda I - F|G] = \begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & \lambda+1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

e in corrispondenza dell'autovalore 0 si ha:

$$\operatorname{rank}\left([\lambda I - F|G]_{\lambda=0}\right) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

Si deduce che l'autovalore del sottosistema non raggiungibile è -1, unico valore per cui la matrice PBH scende di rango. Attraverso una retroazione K è pertanto possibile allocare gli autovalori in modo da ottenere come spettro per il sistema retroazionato, ad esempio $\sigma(F + GK) = \{-1, -1, -1\}$, costruendo così un controllore asintotico.

In corrispondenza al un generico controllore in forma parametrica $K = [k_0\ k_1\ k_2]$ si ottiene:

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\, k_0 \quad k_1 \quad k_2 \,] = \begin{bmatrix} -k_0 & -k_1 + 2 & -k_2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 + k_0 & k_1 & -1 + k_2 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico assume la seguente espressione

$$\Delta_{F+GK}(s) = \det \begin{bmatrix} s + k_0 & k_1 - 2 & k_2 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 2 - k_0 & -k_1 & s - k_2 + 1 \end{bmatrix} = (s+1)\left(s^2 + (1 + k_0 - k_2)s + (k_0 - 2k_2)\right).$$

Affinché il polinomio caratteristico $\Delta_{F+GK}(s)$ sia pari a $p(s) = (s+1)^3$, deve essere:

$$\begin{cases} 1 + k_0 - k_2 = 2, \\ k_0 - 2k_2 = 1. \end{cases}$$

Ciò porta alla seguente struttura per la matrice di retroazione

$$K = [\,1 \quad k_1 \quad 0\,],$$

con k_1 arbitrario.

Teoria. [4.5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, a pagg. 38-42.