COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
15 Luglio 2008

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (2+a)\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - u(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 2$,

ii) si determini, se esiste, l'ingresso sinusoidale causale $u(t)$ a cui corrisponde l'uscita (forzata) di regime permanente

$$y_{rp}(t) = 4\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right);$$

iii) si determini l'espressione della risposta al gradino del sistema.
[Suggerimento: si verifichi la possibilità di semplificazioni nell'espressione di $W_{-1}(s)$.]

Esercizio 2.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$, del modello ingresso/uscita, a tempo continuo, di funzione di trasferimento

$$G(s) = 0.01\ \frac{(s-10)(s^2+20s+10^4)}{s^2(s+100)}.$$

ii) Si tracci il diagramma di Nyquist della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$, del modello ingresso/uscita, a tempo continuo, di funzione di trasferimento

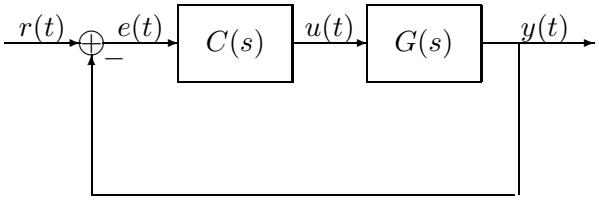
$$G(s) = 1000\ \frac{s}{(s-1)(s+10)^2}$$

e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+0.2s+1}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$, razionale proprio, in modo tale che

1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa unitaria) pari a 0.1;

2) la funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)C(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 10^2$ rad/sec e margine di fase almeno pari a $80°$.

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti, si definiscano i concetti di stabilità asintotica e di stabilità BIBO e si dimostri, operando sia nel dominio del tempo che nel dominio delle trasformate di Laplace, che la stabilità asintotica implica la stabilità BIBO.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 3s^2 + (2+a)s + a.$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

3	1	$2+a$
2	3	a
1	$\frac{2a+6}{3}$	0
0	a	0

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $2a+6>0$ e $a>0$. Ciò si verifica se e solo se $a>0$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $a>0$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2-1}{s^3+3s^2+(2+a)s+a}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri collocati in ± 1. Per questa ragione l'unica semplificazione di interesse tra numeratore e denominatore è quella relativa allo zero in 1 ed essa si verifica se e solo se per qualche valore di a il polinomio al denominatore si annulla in 1. In altre parole se e solo se per qualche valore di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 = s^3 + 3s^2 + (2+a)s + a\big|_{s=1} = 2a+6. \tag{1}$$

Si vede subito che la precedente identità è soddisfatta se e solo se $a=-3$. Per tale valore di a, $d(s)$ diventa s^3+3s^2-s-3 che fattorizza nella forma

$$s^3+3s^2-s-3 = (s-1)\left(s^2+4s+3\right).$$

Di conseguenza

$$W(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{s^3+3s^2-s-3} = \frac{(s-1)(s+1)}{(s-1)\left(s^2+4s+3\right)} = \frac{s+1}{s^2+4s+3} = \frac{1}{s+3}.$$

Ne consegue, visto che abbiamo a che fare con una rappresentazione irriducibile ed il polinomio al denominatore è di Hurwitz, che il sistema è BIBO stabile per $a=-3$ e pertanto si ha BIBO stabilità se e solo se $0<a$ oppure $a=-3$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 2$ sappiamo già, dal punto precedente, che il sistema è asintoticamente stabile e BIBO stabile, quindi esiste la risposta di regime permanente ad ogni segnale sinusoidale. Dalla teoria sappiamo che al segnale

$$u(t) = A\cos(\omega t + \phi)\delta_{-1}(t)$$

il sistema risponde a regime permanente con

$$y_{rp}(t) = |W(j\omega)|A\cos(\omega t + \phi + \arg(W(j\omega)).$$

Ora, nel nostro caso, $\omega = 2$ rad/sec,

$$\begin{aligned} |W(j2)|A &= 4 \\ \phi + \arg(W(j2)) &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Si tratta quindi di capire, una volta determinati $|W(j2)|$ e $\arg(W(j2))$, quali siano i valori di A e ϕ. Ora, per $a = 2$, la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2},$$

la corrispondente risposta in frequenza alla pulsazione $\omega = 2$ rad/sec vale

$$W(j2) = \frac{-4 - 1}{-j8 - 3 \cdot 4 + j4 \cdot 2 + 2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto devono valere le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= 4 \\ \phi + 0 &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$u(t) = 8\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\delta_{-1}(t).$$

iii) [3.5 punti] Come abbiamo già visto, per $a = 2$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2},$$

mentre la trasformata di Laplace del gradino è

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

e quindi la trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$Y_f(s) = W_{-1}(s) = W(s)U(s) = \frac{s^2 - 1}{s(s^3 + 3s^2 + 4s + 2)}.$$

Seguendo il suggerimento, andiamo a cercare possibili cancellazioni. Al numeratore ci sono solo due fattori: $s - 1$ e $s + 1$. Sapendo che la cancellazione del fattore $s - 1$ era possibile

solo per $a = -3$, andiamo a verificare se è possibile semplificare il fattore $s + 1$. Di fatto, è immediato rendersi conto del fatto che il termine di terzo grado, $s^3 + 3s^2 + 4s + 2$, si annulla per $s = -1$, infatti

$$s^3 + 3s^2 + 4s + 2\big|_{s=-1} = -1 + 3 - 4 + 2 = 0.$$

Pertanto si trova facilmente

$$s^3 + 3s^2 + 4s + 2 = (s + 1)(s^2 + 2s + 2)$$

e quindi si ha

$$W_{-1}(s) = \frac{s - 1}{s(s^2 + 2s + 2)}.$$

La decomposizione in fratti semplici porta a

$$W_{-1}(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s + 4}{s^2 + 2s + 2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(s + 1)^2 + 1^2}.$$

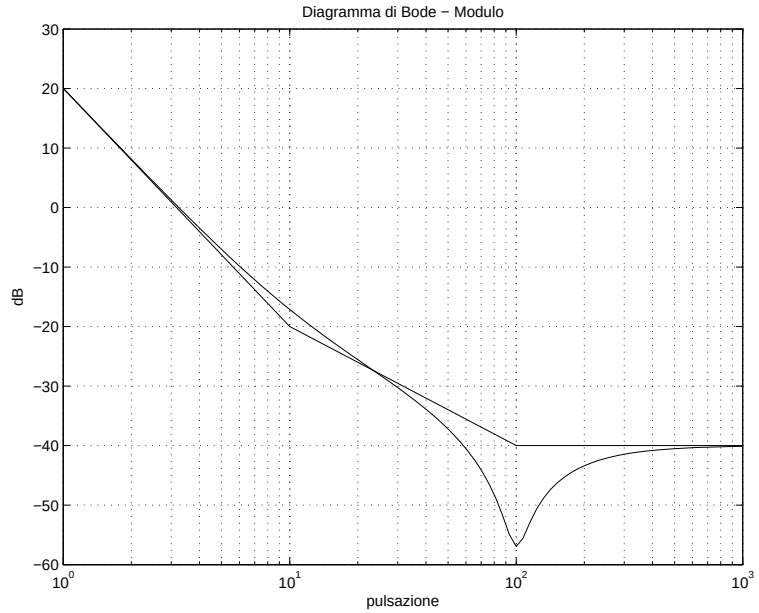
Da ciò segue

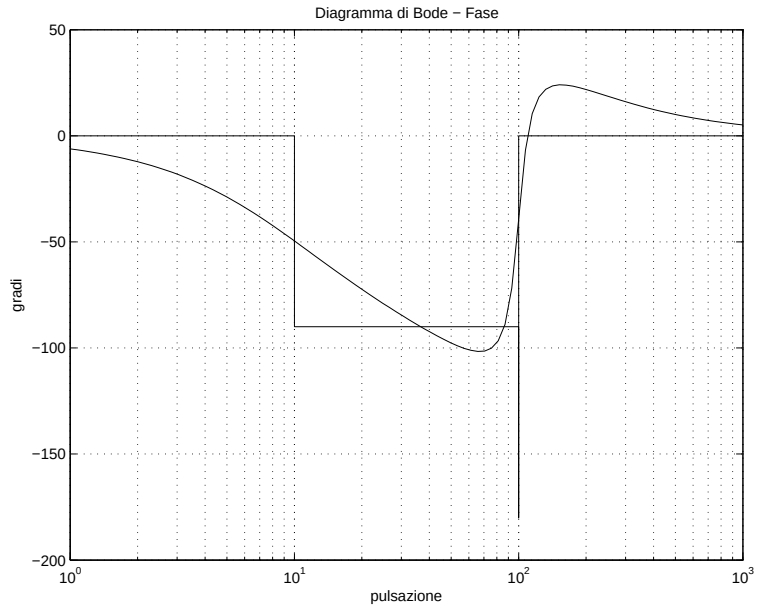
$$w_{-1}(t) = \frac{1}{2}\left[-1 + e^{-t}\cos t + 3e^{-t}\sin t\right]\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = -10\frac{(1 - 0.1s)\left(1 + 2\frac{1}{10}\frac{s}{100} + \frac{s^2}{100^2}\right)}{s^2(1 + 0.01s)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale positivo con $1/T_1' = -10$ e $\mu_1' = 1$, un termine trinomio al numeratore corrispondente a due zeri complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n' = 100$ e smorzamento $\xi' = 1/10 = 0.1$, un polo doppio nell'origine ($\nu = 2$), un polo reale negativo semplice con $1/T = 100$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [5 punti] Da

$$W(j\omega) = 1000\ \frac{j\omega}{(-1-j\omega)(10+j\omega)^2} = \frac{1000\ \omega^2(80-\omega^2) + j1000\ \omega(-100-19\omega^2)}{(1+\omega^2)(100+\omega^2)^2}$$

segue

$$\mathrm{Re}\{W(j\omega)\} = \frac{1000\ \omega^2(80-\omega^2)}{(1+\omega^2)(100+\omega^2)^2} \qquad \mathrm{Im}\{W(j\omega)\} = \frac{1000\ \omega(-100-19\omega^2)}{(1+\omega^2)(100+\omega^2)^2}.$$

Valutiamo preliminarmente il segno di parte reale e parte immaginaria di $W(j\omega)$ al variare

di ω in $\mathbb{R}_+$. Si trova

$$\mathrm{Re}\{W(j\omega)\} = \begin{cases} > 0, & \text{per } 0 < \omega < \omega_1 := \sqrt{80}; \\ 0, & \text{per } \omega = \omega_1; \\ < 0, & \text{per } \omega > \omega_1, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\{W(j\omega)\} < 0, \text{ per } \omega > 0.$$

Per $\omega = \omega_1$, inoltre,

$$\mathrm{Im}\{W(j\omega_1)\} = \frac{1000\ \sqrt{80}(-100 - 19 \cdot 80)}{(1+80)(100+80)^2} = -5.52.$$

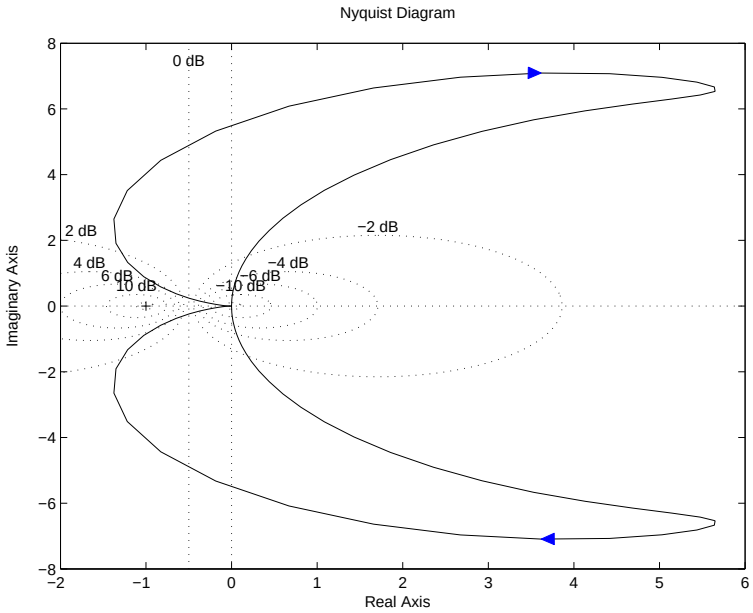
Valutiamo ora i comportamenti limite, per $\omega \to 0^+$ e $\omega \to +\infty$, di $\mathrm{Re}\{W(j\omega)\}$ e $\mathrm{Im}\{W(j\omega)\}$. Si trova

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Re}\{W(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Im}\{W(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Re}\{W(j\omega)\} &= 0 \\ \lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Im}\{W(j\omega)\} &= 0. \end{aligned}$$

Per quanto concerne le fasi, infine, possiamo renderci conto del fatto che

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \to 0^+} \arg\{W(j\omega)\} &= -90^o \\ \lim_{\omega \to +\infty} \arg\{G(j\omega)\} &= -180^o. \end{aligned}$$

Il diagramma di Nyquist risultante è illustrato nella seguente figura:



$G(s)$ ha un solo polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$. Da un'ispezione diretta del diagramma di Nyquist si trova $N = 0$ e quindi $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo a parte reale positiva.

Esercizio 3. [5 punti] Poiché $G(s)$ non ha poli in 0, per rendere il sistema in catena chiusa di tipo 1 devo introdurre un polo nell'origine di molteplicità unitaria. Scelgo, quindi, un precompensatore $C'(s)$ del tipo

$$C'(s) = \frac{K_B(C')}{s},$$

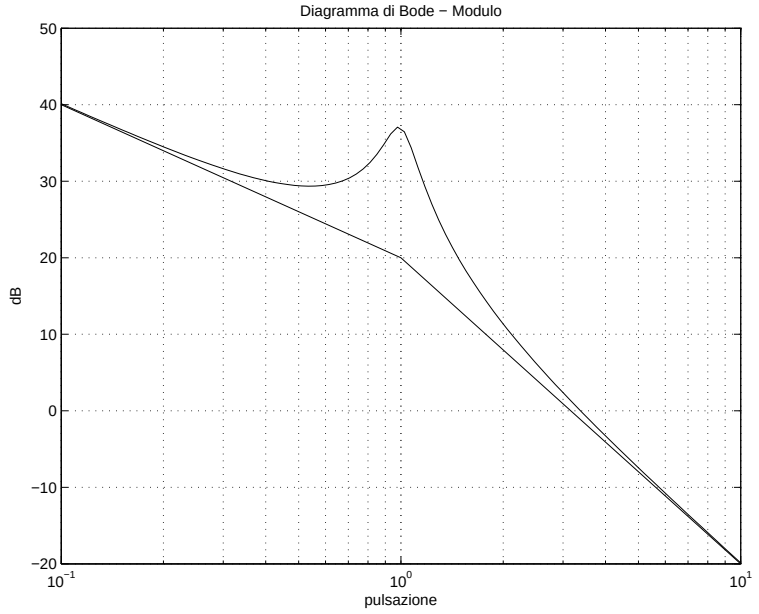
dove $K_B(C')$ verrà scelto in modo da soddisfare il vincolo sull'errore di regime permanente

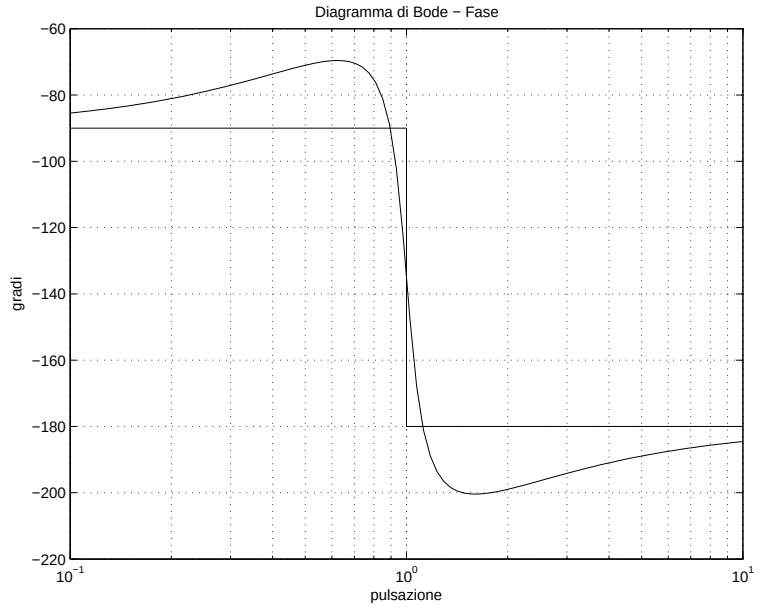
$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(G)K_B(C')} = \frac{1}{0.1K_B(C')} \approx 0.1,$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode di $G(s)$ (in questo caso di valore 1). Si trova quindi $K_B(C') \approx 10$. Assumiamo nel seguito $K_B(C') = 10$. La funzione di trasferimento del sistema in catena aperta diventa allora

$$C'(s)G(s) = 10\frac{1+s}{s\left(1+2\frac{1}{10}s+s^2\right)}.$$

Tracciamone il diagramma di Bode di ampiezza e fase





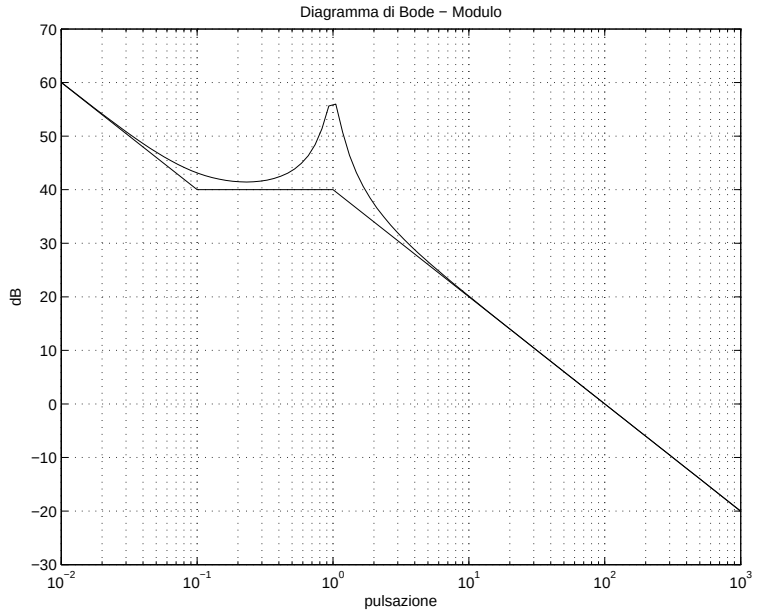
È immediato rendersi conto del fatto che $\omega_A \approx 10^{1/2}$ rad/sec, mentre $m_\psi(\omega_A^*) \approx 0°$. È quindi necessario ricorrere ad una rete anticipatrice. Procedendo "ad occhio", si trova che un modo semplice per conseguire gli obiettivi su pulsazione di attraversamento e margine di fase consiste nell'inserire uno zero in corrispondenza alla pulsazione 10^{-1} rad/sec e successivamente un polo ad una pulsazione maggiore di quella di attraversamento (ad esempio in -10^4 rad/sec). Ciò equivale ad assumere

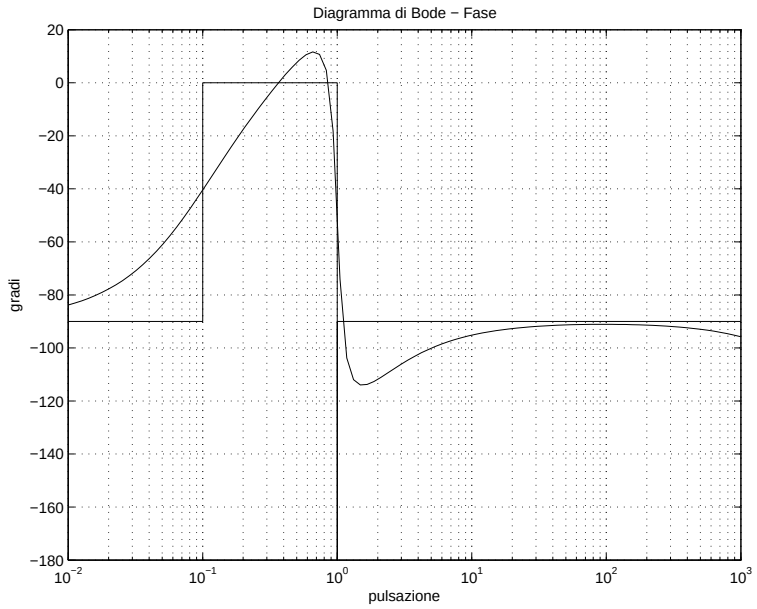
$$C''(s) = \frac{1+10s}{1+10^{-4}s}$$

e quindi il controllore finale è

$$C(s) = C'(s)C''(s) = 10\frac{1+10s}{s(1+10^{-4}s)}.$$

Allo scopo di verifica si traccia qui di seguito il diagramma della funzione di trasferimento in catena aperta finale, $C(s)G(s)$:





Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 4, paragrafo 4.1, del Libro di testo (seconda edizione).