COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
26 Settembre 2008

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + (a^2 - 2a + 4)y(t) = \frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con a parametro reale.

i) Si determini per quale valore di a il sistema presenta tra le sue evoluzioni libere il segnale

$$y_\ell(t) = e^{-t}\cos t,$$

e, in corrispondenza a tale valore di a, si determinino le condizioni iniziali, $y(0^-)$ e $\frac{dy(0^-)}{dt}$, che determinano quella specifica evoluzione libera.

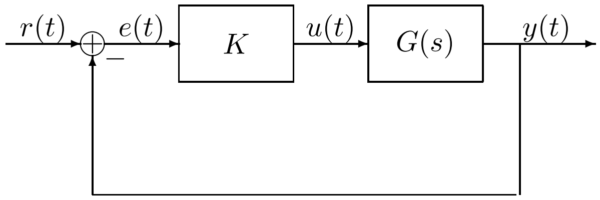
ii) Si determinino i valori di a in corrispondenza ai quali la risposta impulsiva del sistema presenta il modo e^{-t}.

Esercizio 2.

i) Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s-5}{s^3 + 3s^2 + 5s - 1},$$

si supponga di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



con K parametro reale non nullo. Si valuti al variare di K la stabilità BIBO del risultante sistema retroazionato $W(s)$.

Si consideri, nel seguito dell'esercizio, il modello ingresso/uscita a tempo continuo di funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10\,\frac{(s+1)(s-100)}{s\,(s^2 - 10s + 100)}.$$

ii) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

iii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e se ne studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 + 0.1s}{(1 + s)^2},$$

i) se ne calcoli la risposta al gradino e se ne tracci il grafico;

ii) si progetti un controllore $C(s)$ in modo tale che

1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino) <u>all'incirca</u> $e^*_{rp} = 0.091$;
2) la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega^*_A = 10$ rad/sec e
3) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 u(t),$$

($a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$) si derivi in dettaglio, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, l'espressione dell'uscita del sistema in corrispondenza alla generica famiglia di condizioni iniziali $y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}$ e al generico segnale di ingresso $u(t), t \in \mathbb{R}_+$, causale e dotato di trasformata di Laplace e si dimostri che la funzione di trasferimento del sistema è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] Un sistema di secondo ordine presenta tra le sue evoluzioni libere il segnale $e^{-t}\cos t$ se e solo se i suoi modi elementari (scritti in forma reale) sono $e^{-t}\sin t$ e $e^{-t}\cos t$, ovvero i suoi modi elementari (scritti in forma complessa) sono $e^{(-1+j)t}$ ed $e^{(-1-j)t}$, ovvero le radici della sua equazione caratteristica sono $-1 \pm j$. L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = as^2 + 4s + (a^2 - 2a + 4)$$

ed ha radici $-1 \pm j$ se e solo se

$$0 = as^2 + 4s + (a^2 - 2a + 4) \equiv a(s+1-j)(s+1+j) = a(s^2 + 2s + 2)$$

ovvero se e solo se $a = 2$. Per tale valore di a le condizioni iniziali che producono tale evoluzione libera sono

$$\begin{aligned} y(0^-) &= y_\ell(0) = e^{-t}\cos t\big|_{t=0} = 1, \\ \frac{dy(0^-)}{dt} &= \frac{dy_\ell(0)}{dt} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t\big|_{t=0} = -1. \end{aligned}$$

ii) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s}{as^2 + 4s + (a^2 - 2a + 4)}.$$

Il problema si riconduce, anche in questo caso, a quello di determinare i valori di a, se esistono, in corrispondenza a cui l'equazione caratteristica del sistema presenta il modo e^{-t}, ovvero -1 è una delle radici della sua equazione caratteristica. L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = as^2 + 4s + (a^2 - 2a + 4)$$

ed essa ha radice -1 se e solo se

$$0 = a - 4 + (a^2 - 2a + 4) = a^2 - a = a(a-1) = 0.$$

Ciò si verifica se e solo se $a = 0$ oppure $a = 1$. Nel primo caso la $W(s)$ diventa

$$W(s) = \frac{s}{4(s+1)},$$

e quindi e^{-t} è l'unico modo della risposta impulsiva. Per $a = 1$, invece, si trova

$$W(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3}$$

e la risposta impulsiva presenta anche il modo e^{-3t}.

Esercizio 2. i) [3 punti] Posto

$$\begin{aligned} d(s) &= s^3 + 3s^2 + 5s - 1, \\ n(s) &= s - 5, \end{aligned}$$

per valutare la stabilità BIBO del sistema retroazionato al vriare di K occorre e basta valutare (attravero il criterio di Routh) per quali valori di K il polinomio

$$d(s) + Kn(s) = (s^3 + 3s^2 + 5s - 1) + K(s - 5) = s^3 + 3s^2 + (5 + K)s - (1 + 5K)$$

risulti di Hurwitz. La tabella di Routh fornisce

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 5 + K \\ 2 & 3 & -(1+5K) \\ 1 & \frac{16+8K}{3} & 0 \\ 0 & -(1+5K) & 0 \end{array}$$

Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se valgono simultaneamente

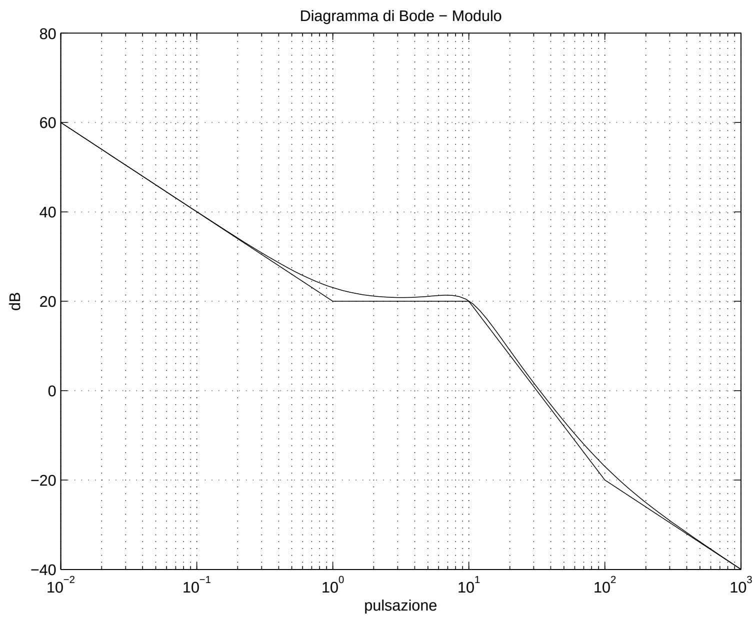
$$\begin{cases} 16 + 8K > 0 \\ -(1 + 5K) > 0 \end{cases}$$

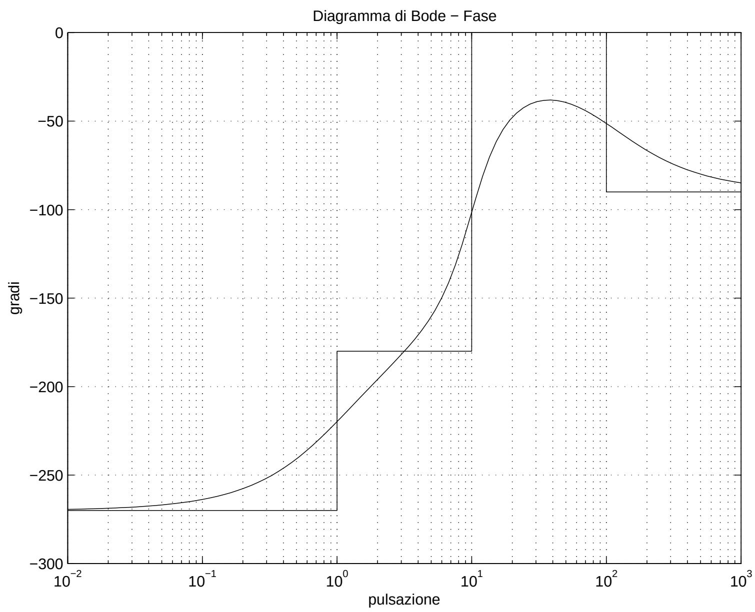
il che si verifica se e solo se $-2 < K < -\frac{1}{5}$.

ii) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

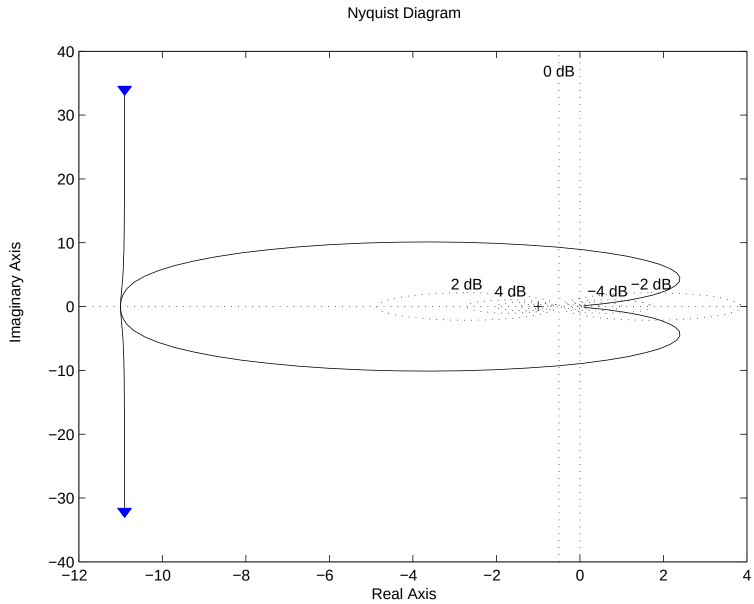
$$G(s) = (-10)\frac{(1 + s)\left(1 - \frac{s}{100}\right)}{s\left(\frac{s^2}{10^2} - 2 \cdot 0.5\frac{s}{10} + 1\right)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale negativo in -1 ($1/T_1' = 1$ e $\mu_1' = 1$), uno zero reale positivo in 100 ($1/T_2' = -100$ e $\mu_2' = 1$) ed una coppia di poli complessi coniugati con $\omega_n = 10$ e $\xi = -0.5$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$). Si noti che i due poli complessi coniugati hanno smorzamento negativo, ovvero parte reale positiva, e sono quindi instabili. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





iii) [6 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



Si noti che il diagramma arriva, per $\omega \to +\infty$, con fase di $270° = -90°$, tuttavia per motivi puramente numerici questo fatto non è ben visibile dal diagramma. Stesso discorso vale per $\omega \to -\infty$, dove la fase è di $90°$.

Per valutare quanti giri il diagramma compie attorno al punto $-1 + j0$ è necessario stimare se il punto di attraversamento del semiasse reale negativo da parte del diagramma di Nyquist si trovi a sinistra o a destra del punto $-1 + j0$. Dalla valutazione del diagramma di Bode si vede che quando la fase assume il valore $180°$ (in corrispondenza a $\omega = 10$ rad/sec) il modulo si trova molto al di sopra del valore 0 dB. Pertanto l'attraversamento del semiasse reale negativo avviene alla sinistra del punto critico. Chiudendo il diagramma al finito (da $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$ in senso orario) si trova che esso compie, quindi, un solo giro in verso antiorario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 1$. Poichè $G(s)$ ha 2 poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 2$, la condizione $N = 1$ assicura $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile e presenta un polo reale positivo.

Esercizio 3. i) [3 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$Y(s) = G(s)\,\frac{1}{s} = \frac{1 + 0.1s}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{0.9}{(s+1)^2}$$

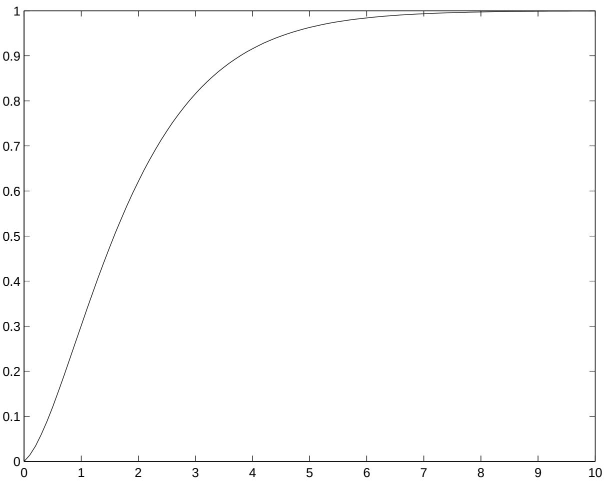
e corrisponde al segnale

$$y(t) = \left[1 - e^{-t} - 0.9te^{-t}\right]\delta_{-1}(t).$$

La sua derivata vale per $t > 0$

$$\frac{dy}{dt} = 0.1e^{-t} + 0.9te^{-t}.$$

Chiaramente tale derivata è sempre non negativa, e pertanto la risposta al gradino ha un andamento monotono crescente. Il grafico della risposta al gradino è il seguente:

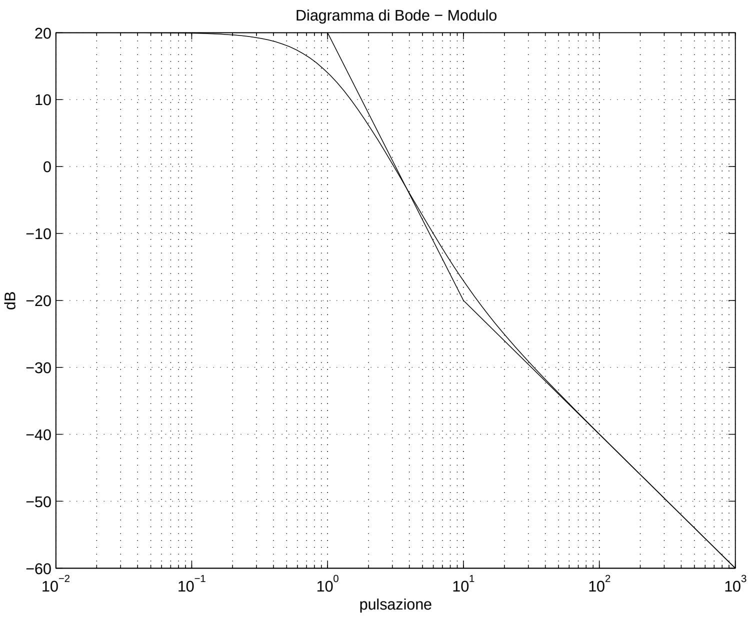


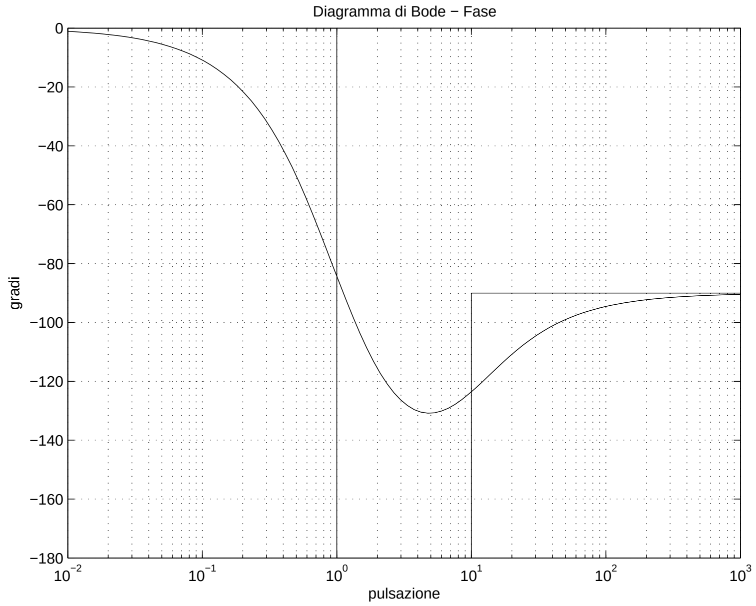
ii) [4 punti] Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \approx 0.091$$

da cui segue $K_B(C) \approx 10$. Prendiamo $K_B(C) = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = 10$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:





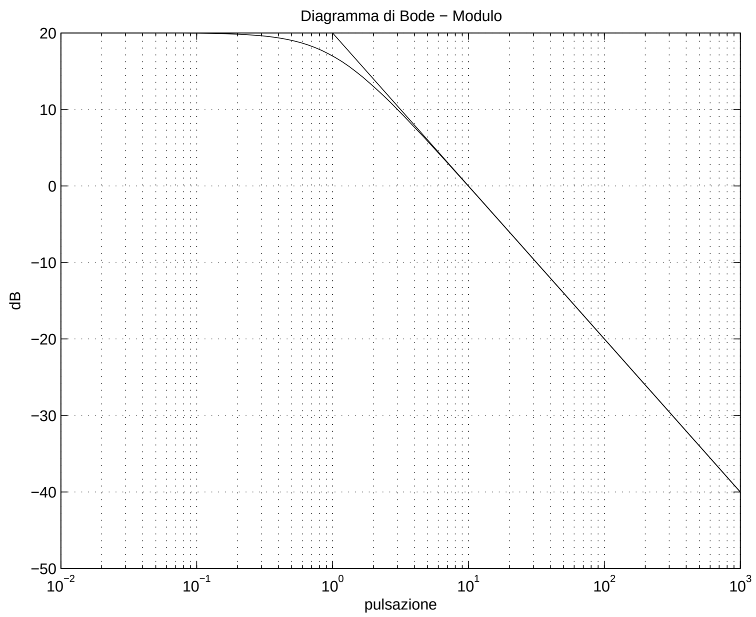
Si trova $10^{1/2}$ rad/s $= \omega_A < \omega_A^* = 10$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180°+\arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $50° \approx m_\psi(\omega_A^*) > m_\psi^* = 45°$. Uno sarebbe tentato di incrementare il guadagno al fine di ottenere il risultato desiderato. Tuttavia in tal modo non verrebbe più soddisfatto il vincolo sull'errore di regime permanente. Per alzare il diagramma delle ampiezze, possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze fino a far sì che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 10$ rad/s e di sollevare la fase di una quantità arbitraria. A tal fine basta scegliere come rete anticipatrice

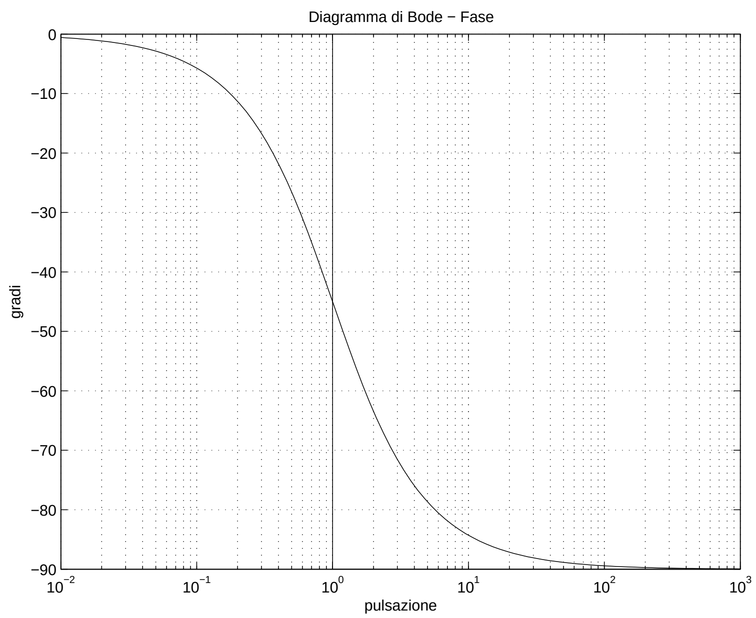
$$C"(s) = \frac{1+s}{1+0.1s}$$

ovvero scegliere come controllore finale

$$C(s) = 10\ \frac{1+s}{1+0.1s},$$

che porta ai seguenti diagrammi di Bode per $C(s)G(s)$:





Teoria. [4 punti] Si veda il Capitolo 3, pag. 68 e seguenti, del Libro di testo.