

# COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI

## 17 Settembre 2008

**Esercizio 1.** Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1-a & 0 & 1 \\ 2a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [1 \quad -1 \quad 0]x(t), \quad t \geq 0\end{aligned}$$

dove  $a$  è un parametro reale.

- i) Al variare di  $a$  in  $\mathbb{R}$ , si calcolino esplicitamente i sottospazi di controllabilità in  $k$  passi per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

Assumendo nel seguito dell'esercizio  $a = 1$

- ii) si determini, se possibile, un controllore dead-beat che renda la matrice  $F + gK$  del sistema retroazionato nilpotente con indice di nilpotenza minimo;
- iii) si progetti, se possibile, una successione di ingresso a cui corrisponde, in evoluzione forzata, un'uscita che è non nulla solo in un istante.

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [1 \quad 0 \quad 1]x(t).\end{aligned}$$

- i) Si determini la forma di Jordan della matrice  $F$  evidenziandone i modi elementari e il carattere, e si calcoli l'esponenziale  $e^{Ft}$ .
- ii) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato in modo tale che l'errore di stima  $e(t)$  sia combinazione lineare (per ogni  $e(0)$ ) di modi esponenziali puri.

**Esercizio 3.** Dato il sistema lineare discreto

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= F\mathbf{x}(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \\ \mathbf{y}(t) &= H\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

- i) si determini, operando nel dominio delle trasformate zeta, l'espressione della risposta impulsiva (matriciale) del sistema;
- ii) si determini, se esiste, una successione di ingresso che porta lo stato del sistema da  $\mathbf{x}(0) = [0 \quad 1 \quad 1]^T$  a  $\mathbf{x}_f = [1 \quad 3 \quad -2]^T$  al tempo  $t = 4$ ;
- iii) si progetti, se possibile, un controllore in retroazione in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia BIBO stabile senza essere asintoticamente stabile.  
[Si ricordi che la matrice di trasferimento del sistema è  $2 \times 1$  e si deve tener conto di entrambe le componenti].

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

**Teoria.** Si dimostri che un generico modello di stato  $\Sigma = (F, G, H)$  di dimensione  $n$  e non raggiungibile è algebricamente equivalente ad un modello di stato in forma standard di raggiungibilità.

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [4 punti] Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$X_1^R = \text{Im}G = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$X_2^R = \text{Im}[G \quad FG] = \text{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1-a \\ -1 & 2a-1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Con riferimento a  $X_2^R$  si distinguono due casi: 1) per  $a = 0$  le due colonne della matrice  $[G \quad FG]$  sono linearmente dipendenti e pertanto

$$X_2^R = X_1^R = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

2) Per  $a \neq 0$  le due colonne sono linearmente indipendenti e quindi

$$X_2^R = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Chiaramente ha senso esplorare il caso di raggiungibilità in tre passi solo per  $a \neq 0$  e in quel caso si trova

$$X_3^R = \text{Im}[G \quad FG \quad F^2G] = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = X_2^R.$$

Pertanto il sistema non è mai raggiungibile, tuttavia per  $a = 0$  il sottospazio raggiungibile ha dimensione 1, mentre per  $a \neq 0$  il sottospazio  $X^R = X_2^R$  ha dimensione 2.

Valutiamo ora i sottospazi di controllabilità.

$$\begin{aligned} X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \text{Im}G\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} (1-a)x_1 + x_3 \\ 2ax_1 + x_2 - x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : (1-a)x_1 + x_3 = -(2ax_1 + x_2 - x_3) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -(1+a)x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1-a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Per il calcolo del sottospazio di controllabilità in due passi distinguiamo il caso  $a = 0$  dal caso  $a \neq 0$ . Per  $a = 0$  si ha

$$\begin{aligned} X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \text{Im}[G \quad FG]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = X_1^C \subset \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Pertanto, per  $a = 0$  il sistema non è controllabile a zero. Per  $a \neq 0$ , invece,

$$X_2^C = \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \text{Im}[G \quad FG]\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} (1-a)^2 x_1 + (1-a)x_3 \\ 2a(1-a)x_1 + 2ax_3 + 2ax_1 + x_2 - x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} (1-a)^2 x_1 + (1-a)x_3 \\ 2a(2-a)x_1 + (2a-1)x_3 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} = \mathbf{R}^3 \\
X_3^C &= X_2^C.
\end{aligned}$$

Pertanto il sistema (che non è mai raggiungibile) per  $a \neq 0$  è controllabile a zero in due passi.

ii) [3.5 punti] Per  $a = 1$  la coppia  $(F, G)$  diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e in base all'analisi condotta al punto i) sappiamo che tale coppia non è raggiungibile ma è controllabile a zero. Inoltre possiamo verificare facilmente che si tratta di una coppia in forma standard di raggiungibilità, dal momento che

$$\mathcal{R}_1 = [G_1 \quad F_{11}G_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

è non singolare. Se introduciamo la matrice  $K = [k_0 \quad k_1 \quad k_2]$  in forma parametrica, ci accorgiamo (vista la struttura in forma standard) che  $K = [K_1 \quad K_2]$  con  $K_1 = [k_0 \quad k_1]$  che va scelta (in modo univoco) al fine di rendere la matrice  $F_{11} + G_1 K_1$  (e quindi  $F + GK$ ) nilpotente. Mentre  $k_2$  è un parametro di progetto che possiamo scegliere per minimizzare l'indice di nilpotenza della  $F + GK$ . Imponendo che

$$F_{11} + G_1 K_1 = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 \\ 2 - k_0 & 1 - k_1 \end{bmatrix}$$

abbia polinomio caratteristico

$$\Delta_{F_{11} + G_1 K_1}(z) = z^2 - (k_0 - k_1 + 1)z + (k_0 - 2k_1) = z^2,$$

si trova  $k_0 = -2, k_1 = -1$ . Se ora valutiamo la matrice  $F + GK$  in corrispondenza a quei due valori dei parametri  $k_0$  e  $k_1$  e per  $k_2$  arbitrario otteniamo

$$F = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 + k_2 \\ 4 & 2 & -1 - k_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

È immediato rendersi conto che questa matrice non sarà mai nulla e pertanto non avrà mai indice di nilpotenza 1. Tuttavia non appena imponiamo  $1 + k_2 = 0$  la matrice diventa diagonale a blocchi, con blocchi diagonali nilpotenti, uno di indice 1 e uno di indice 2. Pertanto per  $k_2 = -1$ , ovvero

$$K = [-2 \quad -1 \quad -1],$$

$F + GK$  ha indice di nilpotenza 2 che è il minimo possibile.

iii) [3.5 punti] Per  $a = 1$  il sistema è in forma standard di raggiungibilità e poiché la funzione di trasferimento del sistema dipende dal solo sottosistema raggiungibile è facile ottenere

$$w(z) = w_1(z) = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} z & 0 \\ -2 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2z-3}{z(z-1)}.$$

L'uscita forzata presenta un solo campione non nullo, ovvero  $y(k) = y(i)\delta(k-i)$  per qualche  $i \in \mathbb{Z}_+$ , se e solo se la sua trasformata zeta è del tipo  $Y(z) = y(i)z^{-i}$ . Tenuto conto della struttura della funzione di trasferimento, a questo risultato si può pervenire prendendo

$$U(z) = \frac{z-1}{2z-3} = \frac{1}{2} \frac{z-1}{z-\frac{3}{2}}$$

che corrisponde alla successione di ingresso

$$u(k) = \frac{1}{2}\delta(k) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\delta_{-1}(k-1).$$

**Esercizio 2.** i) [4 punti] La matrice  $F$  ha una struttura triangolare, e il suo polinomio caratteristico è

$$\Delta_F(s) = (s+1)^3;$$

si ha pertanto un unico autovalore  $\lambda = -1$  di molteplicità algebrica  $n_{-1}$  pari a 3. Per ottenere la forma di Jordan calcoliamo la molteplicità geometrica  $s_{-1}$  associata all'unico autovalore, che risulta pari alla dimensione dell'autospazio associato:

$$s_{-1} = \dim U_{-1} = \dim \ker(-I_3 - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Vi sono pertanto due miniblocchi associati all'autovalore  $-1$  e la forma di Jordan è:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

I due modi ad essa relativi sono  $e^{-t}$  e  $te^{-t}$ , entrambi convergenti.

Per il calcolo dell'esponenziale  $e^{Ft}$ , si può procedere con il calcolo dalla potenza generica di  $F$ , essendo:

$$e^{Ft} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(Ft)^i}{i!}.$$

Il calcolo esplicito per le prime potenze di  $F$  porge:

$$F^2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F^3 = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad F^4 = \begin{bmatrix} 1 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dots,$$

che può essere scritto in forma generale come

$$F^i = \begin{bmatrix} (-1)^i & (-1)^{i+1}2i & (-1)^{i+1}2i \\ 0 & (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^i \end{bmatrix},$$

che vale per  $i \geq 0$ . Da ciò segue:

$$e^{Ft} = \sum_{i=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} (-1)^i & (-1)^{i+1}2i & (-1)^{i+1}2i \\ 0 & (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^i \end{bmatrix} \frac{t^i}{i!} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 2te^{-t} & 2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

ii) [3 punti] Il calcolo della matrice di osservabilità fornisce

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix},$$

che ha rango 2. Di conseguenza il sistema non è osservabile e la matrice  $F_{22}$  del sottosistema non osservabile è scalare. Essendo  $\lambda = -1$  l'unico autovalore di  $F$ , questo è anche l'autovalore del sottosistema non osservabile. Trattandosi di un autovalore a parte reale negativa, il sistema è rivelabile ed esiste pertanto uno stimatore asintotico. Precisamente è possibile attribuire come polinomio caratteristico di

$F + LH$  ogni polinomio (monico di terzo grado) multiplo di  $s + 1$ . Se vogliamo inoltre che tale stimatore abbia solo modi esponenziali puri basta scegliere, ad esempio

$$p(s) = (s + 1)(s + 2)(s + 3),$$

e determinare una opportuna matrice  $L$  tale che  $\Delta_{F+LH}(s) = p(s)$ .

Posto  $L = [a \quad b \quad c]^T$  si trova

$$F + LH = \begin{bmatrix} -1 + a & 2 & 2 + a \\ b & -1 & b \\ c & 0 & -1 + c \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è  $\Delta_{F+LH}(s) = s^3 + (3 - a - c)s^2 + (3 - 2a - 2b - 4c)s + (1 - a - 2b - 3c)$ . Imponendo che esso coincida con  $p(s)$  si trova

$$L = [-3 \quad -1 \quad 0]^T.$$

**Esercizio 3.** i) [3 punti] Nel dominio delle trasformate si trova che la matrice di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ -1 & z & 0 \\ 0 & 0 & z + 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^3 + z^2} \\ -\frac{z^2 + 1}{z^3 + z^2} \end{bmatrix}.$$

Procediamo a riscrivere in modo opportuno entrambe le componenti di  $W(z)$ , ottenendo in tal modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^3 + z^2} &= \frac{1}{z^2(z + 1)} = z^{-3} \frac{z}{z + 1} \\ -\frac{z^2 + 1}{z^3 + z^2} &= -\frac{z^2}{z^2(z + 1)} - \frac{1}{z^2(z + 1)} = -z^{-1} \frac{z}{z + 1} - z^{-3} \frac{z}{z + 1}, \end{aligned}$$

che porta subito (mediante le proprietà di traslazione) a

$$W(k) = \begin{bmatrix} (-1)^{k-3} \delta_{-1}(k - 3) \\ -(-1)^{k-1} \delta_{-1}(k - 1) - (-1)^{k-3} \delta_{-1}(k - 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{k-3} \delta_{-1}(k - 3) \\ -\delta(k - 1) + \delta(k - 2) - 2(-1)^{k-3} \delta_{-1}(k - 3) \end{bmatrix}.$$

ii) [3.5 punti] È immediato verificare che il sistema è raggiungibile e pertanto il problema ha certamente soluzione. Per effettuare l'azione di controllo da  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}(4) = \mathbf{x}_f$ , si tratta di risolvere la seguente equazione nelle incognite  $u(0), u(1), u(2)$  e  $u(3)$ :

$$\mathbf{x}_f - F^4 \mathbf{x}_0 = [g \quad Fg \quad F^2g \quad F^3g] \begin{bmatrix} u(3) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

Sostituendo alle espressioni generiche gli specifici valori numerici troviamo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(3) \\ u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

che ammette infinite soluzioni tra cui, ad esempio,

$$u(0) = 0 \quad u(1) = u(2) = 4 \quad u(3) = 3.$$

iii) [3 punti] Sia  $K = [a \ b \ c]$  la matrice generica di controllo in retroazione. La funzione di trasferimento del sistema retroazionato risulta

$$W_K(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 & 1 \\ -1 & z & 0 \\ a & b & z+1+c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z^3+(1+c)z^2-az-b} \\ -\frac{z^2+1}{z^3+(1+c)z^2-az-b} \end{bmatrix}.$$

Ora, è immediato rendersi conto del fatto che, per effetto della prima componente della matrice di trasferimento  $W_K(z)$ , il cui numeratore è unitario, non è possibile che la prima componente della funzione di trasferimento  $W_K(z)$ , ovvero  $\frac{1}{z^3+(1+c)z^2-az-b}$ , abbia tutti i poli di modulo minore di 1 se tale proprietà non ce l'ha già il polinomio  $z^3 + (1+c)z^2 - az - b$ , che è polinomio caratteristico del sistema. Pertanto non è possibile attribuire la proprietà di stabilità BIBO al sistema retroazionato senza attribuirgli quella di stabilità asintotica.

**Teoria.** [4 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini “Appunti di Teoria dei Sistemi”, Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.